GS. TSKH. NGUYỄN VĂN KHANG

Bài tập

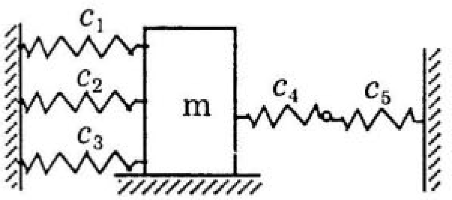
DAO ĐỘNG KỸ THUẬT

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI 2009

Chương I

Dao động tuyến tính của hệ một bậc tự do

1.1 Dao động tự do không cản



Hình TD1.1

Thí dụ 1.1 Vật có khối lượng $m = 5$ kg đặt trên nền nhẵn. Các lò xo có độ cứng $c_1 = c_3 = 10^4$ N/m, $c_2 = c_4 = c_5 = 10^3$ N/m. Hãy xác định độ cứng tương đương của hệ lò xo và tần số dao động riêng của hệ (hình TD 1.1)

Lời giải. Độ cứng tương đương của các lò xo song song c_1, c_2, c_3:

$$c_{13} = c_1 + c_2 + c_3$$

Độ cứng tương đương của các lò xo nối tiếp c_4, c_5:

$$\frac{1}{c_{45}} = \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} \Rightarrow c_{45} = \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5}$$

Độ cứng tương đương của các lò xo song song c_{13} và c_{45}:

$$c^* = c_{13} + c_{45} = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5} = 21,5 \cdot 10^3 \text{ N/m}.$$

Tần số dao động riêng của hệ:

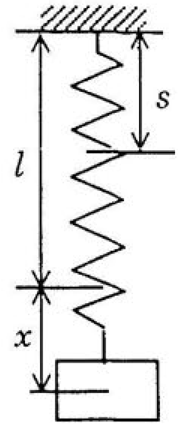
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = 65,574\ rad/s$$

Thí dụ 1.2 Trọng lượng vật treo là P. Lò xo có độ dài tự nhiên l, độ cứng c, trọng lượng P_0. Tìm chu kỳ dao động của vật (hình TD 1.2)

Lời giải. Biến dạng của lò xo tại vị trí s:

$$\frac{x(s)}{s} = \frac{x}{l} \rightarrow x(s) = x \cdot \frac{s}{l}$$

Suy ra: $\dot{x}(s) = \dot{x}\frac{s}{l}$; $\dot{x}^2(s) = \dot{x}^2\frac{s^2}{l^2}$



Hình TD 1.2

Động năng của lò xo:

$$T_{lx} = \frac{1}{2}\int_0^l v^2(s)dm; \quad dm = \frac{P_0}{gl}ds$$

Động năng của hệ:

$$T = \frac{P}{2g}\dot{x}^2 + \frac{P_0\dot{x}^2}{2gl}\int_0^l \frac{s^2}{l^2}ds = \frac{P + \frac{P_0}{3}}{2g}\dot{x}^2$$

Thế năng của lò xo đối với với vị trí cân bằng tĩnh của vật:

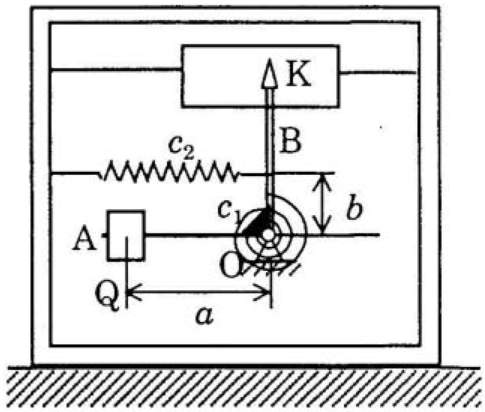
$$\Pi = \frac{c}{2}x^2$$

Thay vào phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

Phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\frac{(P + \frac{P_0}{3})}{g}\ddot{x} + cx = 0$$



Hình TD 1.3

Chu kỳ : $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{P + \frac{P_0}{3}}{cg}}$.

Nhận xét: Khi kể đến trọng lượng P_0 của lò xo, trọng lượng cả hệ coi như tăng lên $P_0/3$.

Thí dụ 1.3 Dụng cụ đo dao động thẳng đứng. Tay đòn AOB có mômen quán tính đối với trục quay O là *J*. Lò xo xoắn có độ cứng c_1, lò xo thẳng có độ cứng c_2. Đối trọng có trọng lượng Q. Các khoảng cách OA = a, OB = b. Bỏ qua kích thước của đối trọng và sức căng ban đầu của các lò xo (hình TD 1.3). Tìm chu kỳ dao động nhỏ của kim K quanh vị trí cân bằng.

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của đòn OAB:

$$(J + \frac{Q}{g}a^2)\ddot{\varphi} + (c_1 + c_2 b^2)\varphi = 0;$$

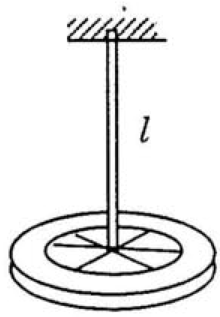
Hay: $$\ddot{\varphi} + \frac{c_1 + c_2 b^2}{Jg + Qa^2} g\varphi = 0 .$$

Chu kỳ: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Jg + Qa^2}{g(c_1 + c_2 b^2)}}$.

Thí dụ 1.4 Vôlăng được gắn vào thanh bằng thép dài $l = 2$ m, đường kính $d = 0{,}5$ cm. Cho vôlăng một góc quay ban đầu rồi thả ra, người ta đo được 10 dao động xoắn trong 30,2 s. Tìm mômen quán tính đối với trục quay của vôlăng và thanh. Biết môđun trượt của thép $G = 80.10$ N/m^2 (hình TD 1.4).

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động của hệ:

$$J\ddot{\varphi} = -c\varphi \rightarrow \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0;\ \omega_0^2 = \frac{c}{J}.$$



Hình TD 1.4

Tần số riêng của dao động xoắn:

$$\omega_0 = 2\pi\frac{10}{30{,}2} = 2{,}081\ rad/s .$$

Độ cứng của thanh: $c = GI_p/l$,

với I_p là mômen quán tính độc cực của mặt cắt ngang

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32}(0{,}5.10^{-2})^4 = 0{,}006136.10^{-8}$$

Độ cứng: $$c = \frac{80.10^9 \times 0.006136.10^{-8}}{2} = 2{,}455\ Nm/rad$$

Suy ra: $$J = \frac{c}{\omega_0^2} = \frac{2{,}455}{(2{,}081)^2} = 0{,}567\ kgm^2 .$$

Thí dụ 1.5 Một trục quay dài l, nằm ngang, mang hai đĩa ở hai đầu. Mômen quán tính của các đĩa đối với trục quay là J_1 và J_2. Độ cứng xoắn của trục là c . Hãy xác định quy luật dao động tương đối của hai đĩa. (hình TD 1.5).

Lời giải. Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2$$

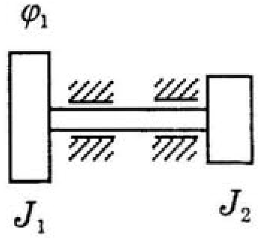
Thế năng của hệ:

$$\Pi = \frac{1}{2}c(\varphi_2 - \varphi_1)^2$$

Phương trình vi phân dao động xoắn của hệ:

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$



Hình TD 1.5

hay:

$$-\ddot{\varphi}_1 = \frac{c(\varphi_2 - \varphi_1)}{J_1}$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{c(\varphi_2 - \varphi_1)}{J_2}$$

$$\ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = (\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2})c(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (1)$$

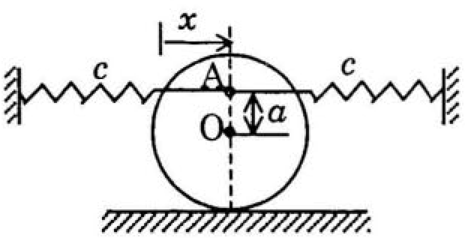
Nếu đặt $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, từ (1) ta có:

$$\ddot{\psi} + c(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2})\psi = 0 \qquad (2)$$

Ta thấy góc quay tương đối của hai đĩa thay đổi theo quy luật dao động điều hoà. Tần số dao động riêng là:

$$\omega_0 = \sqrt{c(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2})}.$$

Thí dụ 1.6 Đĩa tròn đồng chất bán kính r, khối lượng m, lăn không trượt trên nền ngang. Hai lò xo cùng có độ cứng c, nối với đĩa ở khoảng cách OA = a tới tâm đĩa. Tìm tần số dao động riêng của đĩa (hình TD 1.6)



Hình TD 1.6

Lời giải. Động năng của đĩa:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_O\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{4}mr^2(\frac{\dot{x}}{r})^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2$$

Thế năng của hai lò xo:

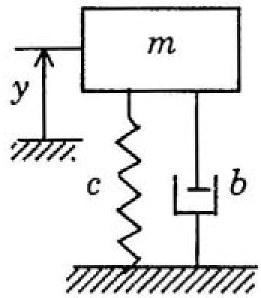
$$\Pi = 2\frac{1}{2}c(\frac{a+r}{r})^2 x^2$$

Phương trình vi phân chuyển động của đĩa:

$$\ddot{x} + \frac{4c(a+r)^2}{3mr^2}x = 0$$

Tần số riêng của dao động:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4c(a+r)^2}{3mr^2}} \quad rad/s.$$



Hình TD 1.7

1.2 Dao động tự do có cản

Thí dụ 1.7 Một vật thể dao động tịnh tiến, lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc (hình TD 1.7). Trong 3 giây người ta đo được đúng 11 độ lệch cực đại theo hai phía (tức là 5 dao động) và ghi lại kết quả dưới dạng bảng số như sau:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_{max} (mm)	12,0	-10	7,6	-6,2	5,3	-4,2	3,5	-2,7	2,1	-1,8	1,4

Hãy xác định độ tắt lôga Λ và hệ số cản δ của dao động.

Lời giải. Chu kỳ dao động tắt dần:

$$T^* = \frac{3}{5} = 0,6\ s$$

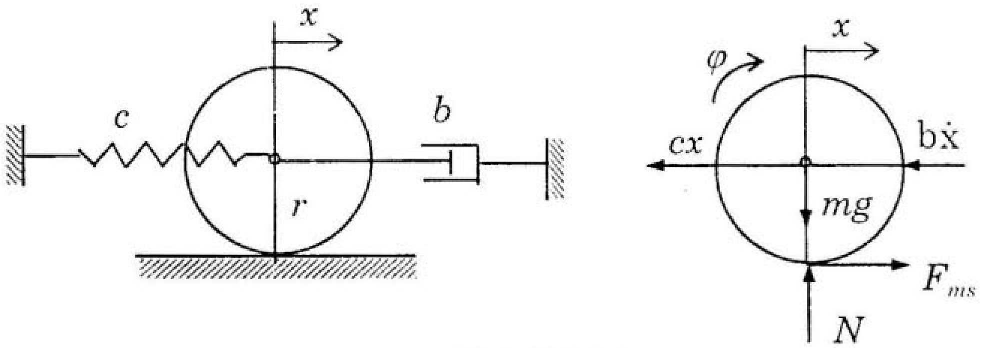
Độ tắt lôga: $\Lambda = \delta T^* = \frac{1}{5}\ln\frac{1,4}{12} = 0,424$

Hệ số cản: $\delta = \frac{\Lambda}{T^*} = \frac{0,424}{0,6} = 0,707\ s^{-1}$.

Thí dụ 1.8 Đĩa tròn đồng chất có khối lượng là m= 50 kg, bán kính r = 0,5m lăn không trượt trên nền ngang. Lò xo có độ cứng c = 75 N/m, hệ số cản nhớt b = 10 Ns /m (hình TD 1.8). Xác định:

a) Độ cản δ và độ cản Lehr D, tần số ω, chu kỳ dao động tắt dần .

b) Chuyển động $x(t)$ của tâm đĩa, khi $t = 0$: $x = -0{,}2$ m; $\dot{x} = 0$.



Hình TD 1.8

Lời giải. Phương trình vi phân chuyển động song phẳng của đĩa:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_{ms} - cx - b\dot{x} \\ \dfrac{1}{2}mr^2\ddot{\varphi} = -rF_{ms} \end{cases}$$

Từ điều kiện lăn không trượt của đĩa $\dot{x} = r\dot{\varphi} \;\rightarrow\; \ddot{x} = r\ddot{\varphi}$ ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của tâm đĩa:

$$\ddot{x} + \frac{2b}{3m}\dot{x} + \frac{2c}{3m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Tần số dao động riêng (không cản): $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2c}{3m}} = \sqrt{\dfrac{2.75}{3.50}} = 1\ rad/s$

a) Độ cản, tần số dao động và chu kỳ :

$$\delta = \frac{b}{3m} = \frac{10}{3.50} = 0{,}0667\ s^{-1} \rightarrow D = \frac{\delta}{\omega_0} = 0{,}0667$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{1 - 0.0667^2} = 0{,}998\ rad/s$$

$$T^{*} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,998} = 6,30\ s.$$

b) Chuyển động $x(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân:

$$x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha) = Ae^{-0,0667t}\sin(0.998 + \alpha)$$

Suy ra:

$$\dot{x} = -0,0667Ae^{-0,0667t}\sin(0,998t + \alpha) + 0,998Ae^{-0,0667t}\cos(0,998t + \alpha)$$

Khi $t = 0$:

$$x_0 = A\sin\alpha = -0,2$$
$$\dot{x}_0 = -0,0667A\sin\alpha + 0,998A\cos\alpha = 0$$

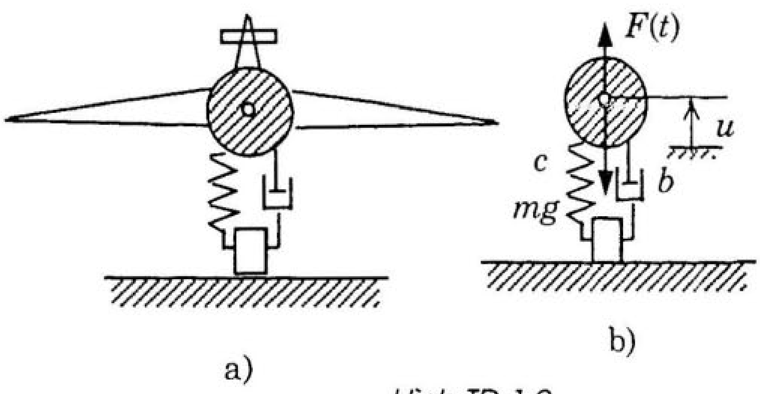
Từ đó:

$$A = -0,2004\ m; \quad \alpha = 1,504\ rad$$
$$x = -0,2004e^{-0,0667t}\sin(0,998t + 1,504)\ m.$$

Thí dụ 1.9 Một máy bay hạ cánh được mô hình hoá cơ học bởi một hệ gồm khối lượng m, lò xo có độ cứng c và lực cản tuyến tính với hệ số cản b. Khi hạ cánh, lực nâng và trọng lượng máy bay cân bằng nhau, vận tốc hạ xuống là v_{hc}= 2 m/s. Sau khi hạ cánh, máy bay bị hãm và lăn chậm trên đường băng.

Biết: $m = 10^3$ kg; $c = 3.10^3$ N/m; $b = 2,74.10^3$ Ns/m (hình TD 1.9).

Coi u là toạ độ trọng tâm của máy bay khi bắt đầu hạ cánh. Xác định:



Hình TD 1.9

a) Tần số dao động theo phương thẳng đứng của máy bay

b) Quá trình dao động thẳng đứng và gia tốc theo phương thẳng đứng của máy bay khi lăn trên đường băng.

Lời giải. Phương trình dao động của máy bay theo phương thẳng đứng khi chạm đất với lực nâng $F(t)$:

$$m\ddot{u} + b\dot{u} + cu = F(t) - mg \doteq 0$$

với điều kiện đầu:

$$u(0) = 0; \dot{u}(0) = -v_{hc} = -2\ m/s$$

a) Tần số riêng và độ cản:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = 3\ s^{-2}; \delta = \frac{b}{2m} = 1,37\ s^{-1}$$

Tần số dao động tắt dần:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 1,06\ s^{-1}$$

b) Nghiệm của phương trình vi phân được tìm ở dạng:

$$u(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\dot{u}(t) = -\delta Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha) + \omega Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

Từ điều kiện đầu : $u(0) = 0; \dot{u}(0) = -2\ m/s$

ta nhận được :

$$A = -0,326\ m;\ a = 0.$$

Do đó dao động theo phương thẳng đứng trong khi máy bay lăn trên đường băng là:

$$u(t) = -0,326e^{-1,37t}\sin(6,13t).$$

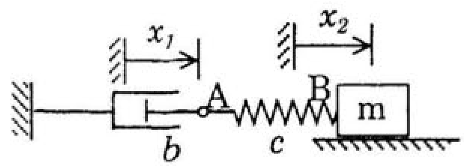
Gia tốc theo phương thẳng đứng:

$$\ddot{u}(t) = e^{-1,37t}[5,48\cos(6,13t) + 11,65\sin(6,130]$$

$$\ddot{u}_{max} = 10,23\ m/s^2\ khi\ t = 0,15\,s$$

Thí dụ 1.10 Trong nhiều bài toán thiết kế, người ta phải lắp các phần tử cản và phần tử đàn hồi nối tiếp nhau như hình TD 1.10. Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ và tìm điều kiện xuất hiện dao động tự do có cản.

Lời giải. Gọi A là điểm nối giữa lò xo và phần tử cản. Điểm A chịu tác dụng của lực $F_c = b\dot{x}_1$. Biến dạng của lò xo là x_2-x_1, do đó ở điểm B xuất hiện lực đàn hồi $F_{dh} = c(x_2 - x_1)$. Tách riêng phần tử lò xo AB ta có:



Hình TD 1.10

$$F_c = b\dot{x}_1 = F_{dh} = c(x_2 - x_1) \tag{1}$$

Áp dụng định luật Newton hai đối với chất điểm m ta có:

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1) \tag{2}$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$b\dot{x}_1 = c(x_2 - x_1) = -m\ddot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{m}{b}\ddot{x}_2 \tag{3}$$

Từ (3) suy ra :

$$x_1 = -\frac{m}{b}\dot{x}_2 + E \tag{4}$$

trong đó E là hằng số tích phân.

Thay (4) vào (2) ta được:

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 + \frac{m}{b}\dot{x}_2 - E) \Rightarrow m\ddot{x}_2 + \frac{cm}{b}\dot{x}_2 + cx_2 = cE \tag{5}$$

Hằng số E được xác định từ các điều kiện đầu. Nếu cho $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$ thì $E = 0$, khi đó phương trình (5) có dạng:

$$\ddot{x}_2 + \frac{c}{b}\dot{x}_2 + \frac{c}{m}x_2 = 0 \tag{6}$$

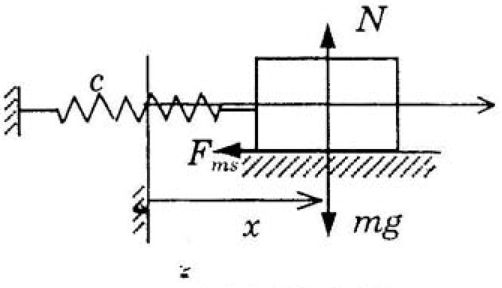
Từ đó suy ra $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$; $\delta = \dfrac{c}{2b}$

Điều kiện $\delta < \omega_0$ dẫn đến: $\dfrac{c}{2b} < \sqrt{\dfrac{c}{m}} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{mc} < b$.

Thí dụ 1.11 Vật có khối lượng m = 0,5 kg, lò xo có độ cứng c = 245 N/m, hệ số ma sát trượt giữa vật và nền là $\mu = 0{,}2$. Kéo vật sao cho lò xo dãn 3 cm rồi buông ra không vận tốc đầu (hình TD 1.11). Hãy tìm:

a) Chu kỳ dao động và biên độ dao động tắt dần.

b) Vật thực hiện được bao nhiêu dao động cho tới lúc dừng?



Hình TD 1.11a

Lời giải. Lực ma sát phụ thuộc vận tốc của vật:

$$F_{ms} = \begin{cases} \mu mg \ khi \ \dot{x} < 0 \\ -\mu mg \ khi \ \dot{x} > 0 \end{cases}$$

Phương trình vi phân chuyển động của vật:

$$m\ddot{x} = -cx + \mu mg \quad (\dot{x} < 0),$$

$$m\ddot{x} = -cx - \mu mg \quad (\dot{x} > 0).$$

Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$; $s = \dfrac{\mu mg}{c} = \dfrac{0{,}2.0{,}5.9{,}81}{245} = 0{,}004\ m$.

Hai phương trình vi phân trên được viết dưới dạng:

$$(\ddot{x} \pm \ddot{s}) + \omega_0^2(x \pm s) = 0 \qquad (1)$$

Do đó chu kỳ của dao động tắt dần:

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}5}{245}} = 0{,}284\ s$$

Thời gian chuyển động giữa hai không điểm: $\tau = \dfrac{T^*}{2} = 0{,}142\ s$.

Nghiệm của (1) được tìm dưới dạng:

$$(x \pm s) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t.$$

Từ điều kiện đầu ta có:

$$t = 0 : x_0 = 3\,cm, \dot{x}_0 = 0$$

$$\rightarrow A = 0; \quad x_0 \pm s = B$$

Do vật chuyển động theo hướng âm, nên: $B = x_0 - s$

$x - s = (x_0 - s)\cos\omega_0 t.$

Biên độ đầu tiên được xác định từ điều kiện $\dot{x} = 0$:

$$\frac{d}{dt}(x - s) = -\omega_0(x_0 - s)\sin\omega_0 t = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{\omega_0}.$$

Do đó $x_1 = -(x_0 - 2s) = -2,2\ cm$ (tính từ 0).

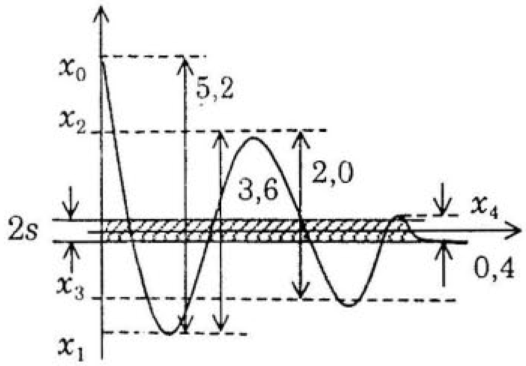
Đối với dao động tiếp theo, các điều kiện đầu mới là:

$$t = \frac{\pi}{\omega_0}; x_t = -(x_0 - 2s)$$

$$x \pm s = C\sin\omega_0 t + D\cos\omega_0 t$$

$$C = 0; D = x_0 - 3s$$

$$x_2 = x_0 - 4s = 1,4\ cm$$



Hình TD 1.11b

Tương tự, ta có (hình TD 1.11b):

$$x_3 = -(x_0 - 6s) = -0,6\ cm$$

$$x_4 = (x_0 - 8s) = -0,2\ cm$$

Vậy vật đã thực hiện 4 dao động với khoảng cách giữa 2 đỉnh lần lượt là:

$$x_0 + |x_1| = 3 + 2,2 = 5,2\ cm; \quad |x_1| + x_2 = 2.2 + 1,4 = 3,6\ cm$$

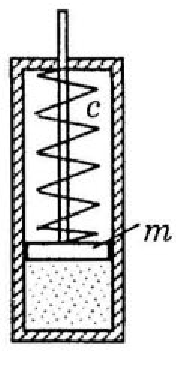
$$x_2 + |x_3| = 1,4 + 0,6 = 2.0\ cm; \quad |x_3| + x_4 = 0,6 - 0,2 = 0,4\ cm.$$

1.3 Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động điều hoà

Thí dụ 1.12 Píttông có khối lượng $m = 0{,}01$ kg; diện tích $S = 4\ cm^2$; chịu áp suất của hơi theo luật

$$p = 40 + 30\sin\frac{2\pi}{T}t \quad (N/cm^2),$$

trong đó: T- thời gian quay 1 vòng của trục máy tạo hơi. Lò xo có độ cứng c = 30 N/cm (hình TD 1.12). Xác định dao động của píttông khi trục của máy tạo hơi quay 3 vòng/s.



Hình TD 1.12

Lời giải. Gọi Ω = 3 vòng/s = 6π rad/s

Lực kích động:

$$P = p.S = S(40 + 30\sin\frac{2\pi}{T}t); \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{1}{3}\ s.$$

Phương trình vi dao động của píttông:

$$m\ddot{x} + cx = S(40 + 30\sin\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{40S}{m} + \frac{30S}{m}\sin\Omega t$$

Tìm nghiệm riêng dưới dạng:

$$x = A\sin\Omega t + B \rightarrow \ddot{x} = -\Omega^2 A\sin\Omega t$$

Sau khi thay vào phương trình vi phân, so sánh các hệ số ta được:

$$A = \frac{30S}{c - m\Omega^2} = \frac{30\times 4}{30 - 0,01\times 36\pi^2} = 4,5\ cm$$

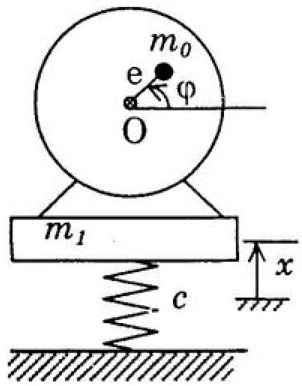
$$B = \frac{40S}{c} = \frac{40\times 4}{30} = \frac{16}{3}\ cm$$

Dao động của píttông:

$$x = 4,5\sin 6\pi t + \frac{16}{3}.$$

Biên độ A = 4,5 cm.

Thí dụ 1.13 Một động cơ điện gắn chặt trên một tấm đỡ. Tấm đỡ đặt trên lò xo, lò xo được chọn sao cho dưới tác dụng của lực 294,3 N nó bị biến dạng một đoạn 1 cm. Trên trục của môtơ gắn một khối lượng phụ $m_0 = 0,2$ kg cách trục O một đoạn $e = 1,3$ cm. Vận tốc góc của động cơ $\Omega = 30\ s^{-1}$. Khối lượng cả hệ là $m = 32,7$ kg. Hãy xác định dao động cưỡng bức của tấm đỡ, biết rằng lúc đầu nó ở trạng thái tĩnh (hình TD 1-13).



Hình TD 1.13

Lời giải.

a) Phương trình vi phân dao động thẳng đứng của động cơ:

$$m\ddot{x} + cx = m_0\Omega^2 \sin\Omega t; \qquad (1)$$
$$m = m_1 + m_0; \; \varphi = \Omega t$$

hay:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{m_0 e\Omega^2}{m} \sin\Omega t; \qquad (2)$$
$$\omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

b) Nghiệm của (2) có dạng:

$$x = C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t + \frac{m_0 e\Omega^2}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin\Omega t \qquad (3)$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ điều kiện đầu:

$$t = 0 : x(0) = 0; \; \dot{x}(0) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{m_0 e\Omega^2}{m(\Omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \frac{\Omega}{\omega_0}; \; C_2 = 0$$

Vây: $$x = \frac{m_0 e\Omega^2}{m(\Omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \frac{\Omega}{\omega_0} \sin\omega_0 t + \frac{m_0 e\Omega^2}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin\Omega t \qquad (4)$$

Theo số liệu đã cho: $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{29430}{32,7}} = 30 \; s^{-1} = \Omega$

Như vậy hệ ở chế độ cộng hưởng.

c) Xác định dao động cưỡng bức của tấm đỡ ở chế độ cộng hưởng:

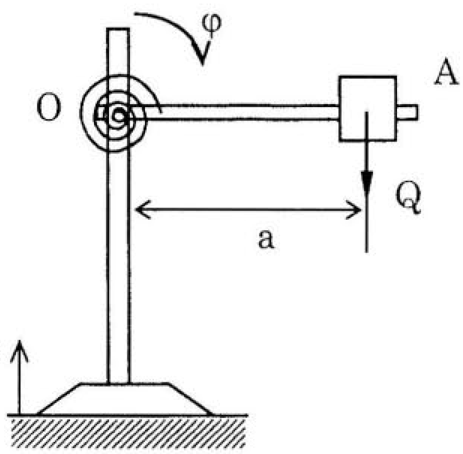
$$x = \lim_{\Omega \to \omega_0} \left[\frac{m_0 e\Omega^2}{m(\Omega^2 - \omega_0^2)} \cdot \frac{\Omega}{\omega_0} \sin\omega_0 t + \frac{m_0 e\Omega^2}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin\Omega t\right]$$
$$= \frac{m_0 e\omega_0^2}{m} \lim_{\Omega \to \omega_0} \left[\frac{\frac{\Omega}{\omega_0} \sin\omega_0 t - \sin\Omega t}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right]$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital $\left(\frac{d}{d\Omega}\right)$ ta có:

$$x = \frac{m_0 e\omega_0^2}{m} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t - t\cos\omega_0 t}{2\omega_0} = \frac{m_0 e}{2m}(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$$

$$x = 0,004(\sin 30t - 30t.\cos 30t)\ cm$$

Thí dụ 1.14 Trong dụng cụ ghi dao động thẳng đứng, thanh OA mang tải trọng Q và được giữ nằm ngang nhờ lò xo xoắn có độ cứng c = 0,981 Ncm/rad. Mômen quán tính của OA cùng tải trọng đối với trục quay O là J = 3,924 kgcm^2. Đại lượng $Q.a$ = 98,1 Ncm (hình TD 1.14). Cho biết góc φ nhỏ, ở vị trí cân bằng thanh OA nằm ngang. Xác định chuyển động quay tương đối của thanh OA khi nền dao động thẳng đứng theo luật z = 0,2 sin25t (cm).



Hình TD 1.14

Lời giải. Đặt

$$z = 0,2\sin 25t = h\sin\Omega t$$

Lực quán tính theo của vật Q :

$$F_{qt}^{e} = \frac{Q}{g}\ddot{z}$$

Phương trình vi phân chuyển động tương đối của OA đối với khung thiết bị:

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = \frac{Qa}{g}\ddot{z}$$

Nghiệm của phương trình vi phân được tìm ở dạng:

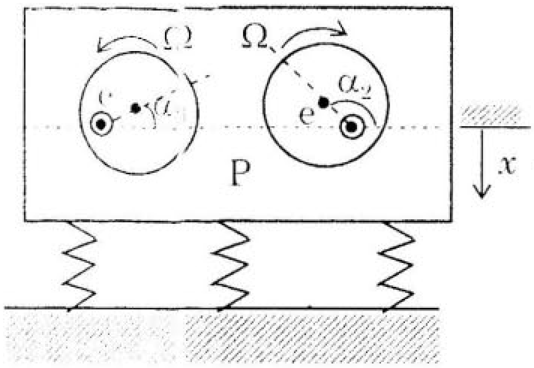
$$\varphi = A\sin\Omega t$$

Thay vào phương trình vi phân, so sánh hệ số, ta nhận được:

$$A(J\Omega^2 - c) = \frac{Q}{g}ah\Omega^2$$

$$A = \frac{Qah}{g(J - \frac{c}{\Omega^2})} = \frac{98,1 \times 0,2}{981(3,924 - \frac{0,981}{25^2})} = 0,0051\ cm.$$

Thí dụ 1.15 Thân của máy gây rung có trọng lượng P. Hai đĩa cùng trọng lượng Q, cùng độ lệch tâm e, khi lắp ráp ban đầu hai đĩa tạo với phương ngang các góc là α_1, α_2. Hệ lò xo có độ cứng là c (hình TD 1.15). Hãy xác định biên độ dao động cưỡng bức thẳng đứng của máy khi hai đĩa quay ngược chiều nhau với cùng vận tốc góc Ω.



Hình TD 1.15

Lời giải. Phương trình vi phân dao động:

$$\frac{(P+2Q)}{g}\ddot{x}+cx=\frac{Qr\Omega^2}{g}[\sin(\alpha_1+\Omega t)+\sin(\alpha_2-\Omega t)]$$

$$\frac{(P+2Q)}{g}\ddot{x}+cx=\frac{2Qr\Omega^2}{g}\sin(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2})\cos(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\Omega t)$$

Tìm x theo dạng sau: $x=A\cos(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+\Omega t)$.

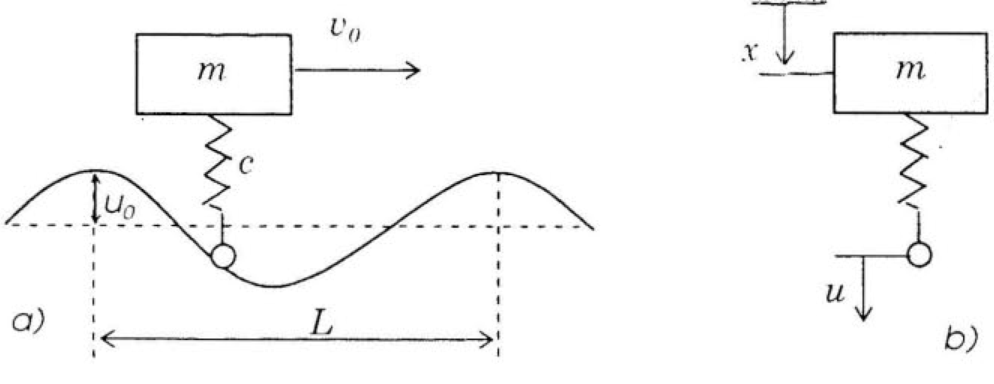
Sau khi thay vào phương trình vi phân, so sánh các hệ số ta được:

$$A=\frac{2Qr}{\frac{cg}{\Omega^2}-(P+2Q)}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}.$$

Thí dụ 1.16 Mô hình cơ học đơn giản của một ôtô là hệ khối lượng - lò xo, chuyển động theo phương ngang với vận tốc không đổi v_0 trên mặt đất gồ ghề theo hình sin (hình TD 1.16).

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động và tìm tần số kích động Ω.

b) Xác định vận tốc tới hạn v_{th} của ôtô.



Hình TD 1.16

Lời giải. Phương trình dao động theo phương thẳng đứng của ôtô:

$$m\ddot{x} = -c(x - u) \Rightarrow m\ddot{x} + cx = cu \tag{1}$$

Gọi s là quãng đường ôtô đi được, ta có

$$s = v_0 t.$$

Từ đó phương trình mặt đường có dạng:

$$u = u_0 \cos\frac{2\pi s}{L} = u_0 \cos\frac{2\pi v_0 t}{L} = u_0 \cos\Omega t \tag{2}$$

Thế (2) vào (1) ta được:

$$m\ddot{x} + cx = cu_0 \cos\Omega t \tag{3}$$

$$\Omega = \frac{2\pi v_0}{L} \tag{4}$$

Nghiệm của (3) được tìm dưới dạng:

$$x = A\cos\Omega t$$

Thế vào (3) ta có:

$$A = \frac{u_0}{1 - \dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{u_0}{1 - \dfrac{4\pi^2 v_0^2}{L^2}\cdot\dfrac{m}{c}}$$

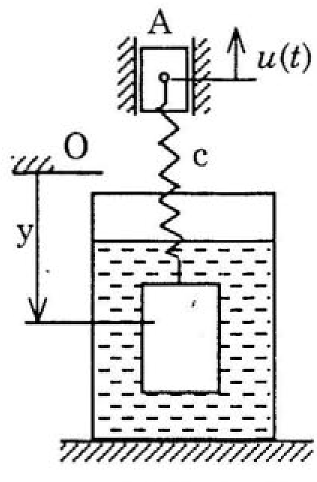
Khi $\Omega = \omega_0$, ôtô đạt vận tốc tới hạn là:

$$v_{th} = \frac{\omega_0 L}{2\pi} = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Thí dụ 1.17 Vật rắn có dạng hình chữ nhật, trọng lượng G = 0,5 N; lò xo có độ cứng c = 0,25 N/cm. Điểm treo lò xo A dao động theo luật:

$$u(t) = \hat{u}\sin\Omega t;\ \hat{u} = 2\ cm;\ \Omega = 15\ rad/s.$$

Lực cản của chất lỏng tỷ lệ bậc nhất với vận tốc của tấm. Khi vận tốc v = 1 cm/s thì lực cản là $R = 3{,}06.10^{-3}$ N (hình TD 1.17). Hãy xác định chuyển động bình ổn của vật.



Hình TD 1.17

Lời giải. Lực kích động bởi di chuyển của A: $f(t) = c.u = c.\hat{u}\sin\Omega t$

Lực cản của chất lỏng: $R_y = -b\dot{y}; b = 3,06.10^{-3}\ Ns/cm$

Phương trình vi phân dao động của vật:

$$m\ddot{y} = -b\dot{y} - cy = f(t)$$

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = h\sin\Omega t$$

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{3,06.10^{-3}\times 980}{2\times 0,5} = 3\ s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m} = \frac{0,25\times 980}{0,5} = 490\ s^{-2}$$

$$h = \frac{c\hat{u}}{m} = \frac{0,25\times 2\times 980}{0,5} = 980\ cm/s^{-2}$$

Nghiệm của dao động cưỡng bức bình ổn được tìm ở dạng:

$$y = A\sin(\Omega t - \beta)$$

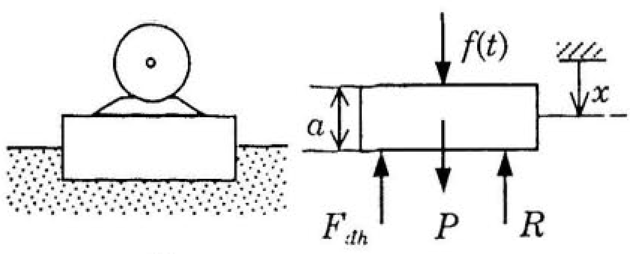
Sau khi thay vào phương trình vi phân, so sánh các hệ số, ta được:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \frac{980}{\sqrt{(490-225)^2 + 4\times 9\times 225}} = \frac{980}{280} \approx 3,5\ cm$$

$$tg\beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = 0,33963 \rightarrow \beta = 0,4274\ rad$$

Do đó: $y = 3,5\sin(15t - 0,3274)\ cm$

Thí dụ 1.18 Móng có khối lượng riêng $\gamma = 2,45\ kg/m^3$. Nền đất có độ cứng riêng $c = 19600\ N/m^3$ và hệ số cản nhớt $b = 588\ Ns/m^3$ (hình TD 1.18). Tìm bề dày a của móng sao cho hàm khuếch đại (hệ số động lực) không vượt quá 1 đối với mọi tần số của dao động cưỡng bức do máy đặt trên móng.



a b

Hình TD 1.18

Lời giải. Gọi:

S - diện tích của móng,

λ_t - độ lún tĩnh của móng,

$f(t)$ = H sinΩt là lực kích động của máy tác động xuống móng theo phương thẳng.

Khối lượng móng $m = aS\gamma$

Lực đàn hồi $F_{dh} = c(x+\lambda_t)$

Lực cản $R = bS\dot{x}$.

Phương trình vi phân dao động thẳng đứng của móng:

$$aS\gamma\ddot{x} = -cS(x+\lambda_t) - bS\dot{x} + aS\gamma g + H\sin\Omega t$$

Hay $$\ddot{x} + \frac{b}{a\gamma}\dot{x} + \frac{c}{a\gamma}x = \frac{H}{aS\gamma}\sin\Omega t$$

Đặt $$2\delta = \frac{b}{a\gamma};\ \omega_0^2 = \frac{c}{a\gamma};\ h = \frac{H}{aS\gamma};\ \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}.$$

Độ cản Lehr $D = \dfrac{\delta}{\omega_0} = \dfrac{b}{2\sqrt{a\gamma c}}$.

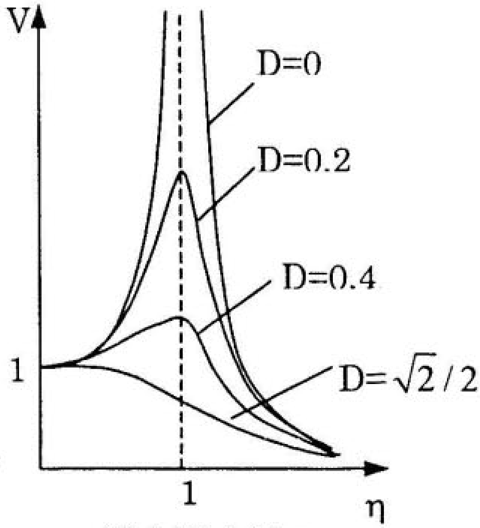
Khi đó: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = h\sin\Omega t$ (1)

Di chuyển của móng do lực tĩnh h:

$$x_t = \frac{h}{\omega_0^2}$$

Nghiệm của (1) khi cưỡng bức bình ổn:

$$x = \hat{x}\sin\Omega t;\quad \hat{x} = \frac{h}{\omega_0^2\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$



Hình TD 1.18 c

Hàm khuyếch đại

$$V(\eta, D) = \frac{\hat{x}}{x_t} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

Hàm V đạt cực đại khi $\eta = \sqrt{1-2D^2}$.

Điều kiện để $V < 1$ hay V không đạt cực đại với mọi tần số của lực kích động là $1 - 2D^2 \le 0$, hay $D \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

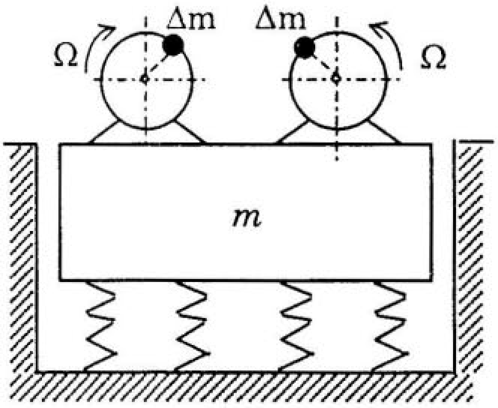
Do đó:

$$\frac{b}{2\sqrt{a\gamma c}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy bề dày của móng:

$$a \leq \frac{b^2}{2\gamma c} = \frac{588^2}{2 \times 2,45 \times 19600} = 3,6\ m$$

Thí dụ 1.19 Để xác định hệ số cản của mô hình dao động, người ta lắp vào hệ dao động hai động cơ lệch tâm như hình vẽ. Lượng lệch tâm $2e.\Delta m$=130 kgcm. Khối lượng cả hệ m = 1800 kg, hệ số cứng tương đương của hệ lò xo c*= 7200 N/cm. Hai môtơ quay đều, ngược chiều nhau với vận tốc góc Ω=20 s^{-1}. Người ta đo được biên độ dao động cưỡng bức bình ổn là A = 0,2 cm. Hãy xác định hệ số cản Lehr, hệ số cản δ và b. Xác định góc pha α. (hình TD 1.19)



Hình TD 1.19

Lời giải. Tần số dao động riêng:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}} = \sqrt{\frac{7200.10^2}{1800}} = 20\ s^{-1} = \Omega$$

Như vậy máy rung làm việc ở chế độ cộng hưởng. Biên độ của lực kích động $F(t) = \hat{F}\cos(\Omega t + \alpha)$ $\hat{F} = 2\Delta m.e.\Omega^2 = 1.30 \times 40^2 = 520\ N$.

Theo công thức xác định biên độ dao động cưỡng bức khi có cản:

$$A = \frac{\hat{F}/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

ta suy ra:

$$D = \frac{\omega_0}{\delta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0}{\Omega}\cdot\sqrt{(\frac{\hat{F}/c}{A})^2 - [1-(\frac{\Omega}{\omega_0})^2]^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{20}\cdot\sqrt{(\frac{520}{7,2.10^5 \times 0,2.10^{-2}})^2 - [1-(\frac{20}{20})^2]^2} = 0,1806$$

Từ đó suy ra:

$$\delta = \omega_0 D = 3,611\ s^{-1};\ b = 2m\delta = 13000\ kg/s$$

Theo công thức $tg\alpha = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$, do $\eta = 1$, ta suy ra $tg\alpha = \infty \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Thí dụ 1.20 Cho mô hình dao động như hình TD1.20. Vật có khối lượng m, lò xo có độ cứng c, hệ số cản nhớt là b, nền nhẵn. Lực kích động có dạng $F(t) = F_0 \cos\Omega t$. Lúc đầu hệ đứng yên. Tìm dao động cưỡng bức của khối lượng m.

Lời giải. Gọi: x_1 - di chuyển của điểm nối I;

x_2 - di chuyển của khối m;

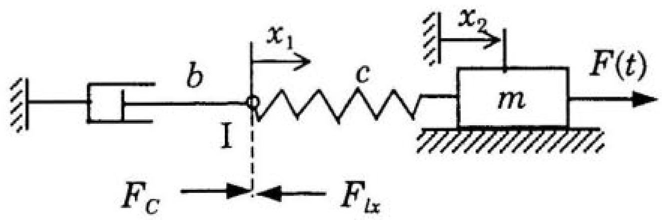
F_C -lực cản; F_{lx} - lực lò xo.

Điều kiện về lực tại I:

$$F_C = b\dot{x}_1 = F_{lx} = c(x_2 - x_1) \qquad (1)$$

Phương trình vi phân dao động của khối m:

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1) + F_0 \cos\Omega t \qquad (2)$$



Hình TD 1.20

Từ (1) và (2) ta có thể khử x_1:

$$m\ddot{x}_2 = -b\dot{x}_1 + F_0 \cos\Omega t \Rightarrow \qquad \dot{x}_1 = -\frac{m}{b}\ddot{x}_2 + \frac{F_0}{b}\cos\Omega t$$

Đặt $\dot{x}_1 = dx_1/dt;\ \ddot{x}_2 = d\dot{x}_2/dt$ và lấy tích phân ta được:

$$x_1 = -\frac{m}{b}\dot{x}_2 + \frac{F_0}{b\Omega}\sin\Omega t + C \qquad (3)$$

Hằng số C được xác định từ điều kiện đầu:

$$t = 0 : x_1 = 0; \dot{x}_2 = 0 \rightarrow C = 0$$

Phương trình (2) trở thành:

$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 + \frac{m}{b}\dot{x}_2 - \frac{F_0}{b\Omega}\sin\Omega t) + F_0\cos\Omega t$$

hay:

$$m\ddot{x}_2 + c\frac{m}{b}\dot{x}_2 + cx_2 = c\frac{F_0}{b\Omega}\sin\Omega t + F_0\cos\Omega t$$

$$\ddot{x}_2 + 2\delta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = F_1\sin\Omega t + F_2\cos\Omega t \qquad (4)$$

Nghiệm của (4) ở chế độ bình ổn được tìm ở dạng:

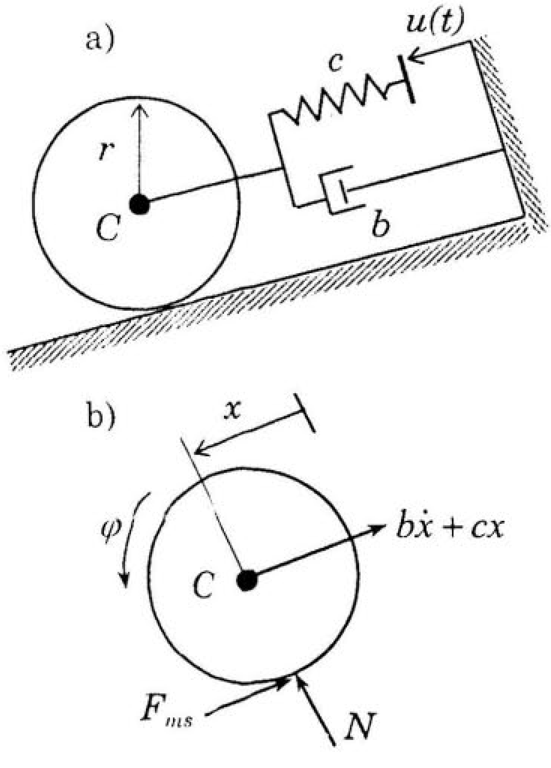
$$x_2^* = A\sin\Omega t + B\cos\Omega t$$

Thay x_2^* vào (4), đồng nhất các hệ số ta nhận được hai phương trình đại số cho phép xác định A và B.

Thí dụ 1.21 Đĩa tròn có khối lượng m, bán kính r, bán kính quán tính $\rho = kr$. Đĩa lăn không trượt trên mặt phẳng nghiêng. Trọng tâm của đĩa nối với một hệ gồm lò xo và cản như hình vẽ. Cho biết hệ số cứng là c, hệ số cản là b.

a) Hãy thiết lập phương trình dao động của hệ và xác định tần số dao động riêng có cản khi lò xo được nối với bờ tường ($u(t) \equiv 0$)

b) Giả sử điểm đầu lò xo chịu một kích động điều hoà $u(t) = \hat{u}\cos\Omega t$. Hãy xác định biên độ dao động cưỡng bức khi $\Omega = \omega_0$ (ω_0 là tần số dao động tự do không cản).



Hình TD 1.21

Lời giải. a) Từ hình vẽ TD 1.21b ta dễ dàng thiết lập được phương trình vi phân dao động của hệ:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - cx - F_{ms} \qquad (1)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = F_{ms}r \qquad (2)$$

Trong đó x là khoảng cách tính từ vị trí cân bằng tĩnh. Phương trình ràng buộc có dạng: $x = r\varphi$.

Chú ý rằng $J_C = mk^2r^2$. Từ hai phương trình (1) và (2) ta suy ra phương trình vi phân dao động của hệ:

$$m(1+k^2)\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \qquad (3)$$

Từ đó suy ra:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m(1+k^2)}, \qquad D = \frac{b}{2\sqrt{m(1+k^2)c}}$$

Tần số dao động tự do có cản được xác định theo công thức:

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2} = \sqrt{\frac{c}{m(1+k^2)}}\sqrt{1-\frac{b^2}{4mc(1+k^2)}}$$

b) Trong trường hợp lò xo chịu kích động *u(t)*, trong phương trình (1) ta thay thế *cx* bằng *c(x-u)* với $u(t) = \hat{u}\cos\Omega t$. Phương trình (3) bây giờ có dạng:

$$m(1+k^2)\ddot{x} + b\dot{x} + cx = c\hat{u}\cos\Omega t \qquad (4)$$

Biên độ dao động cưỡng bức có dạng:

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}}{c}V(\eta), \ \hat{F} = c\hat{u} \qquad (5)$$

Trong đó

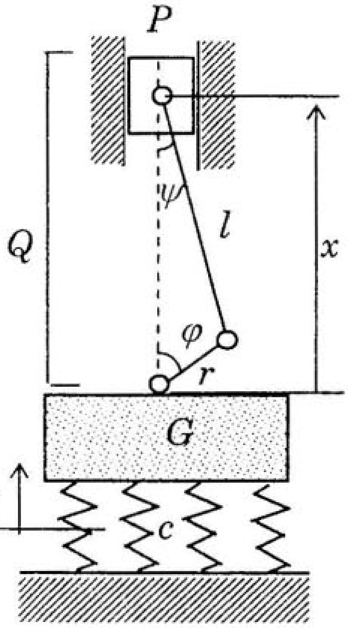
$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \qquad (6)$$

Khi $\Omega = \omega_0$ ($\eta = 1$) từ (5) và (6) ta suy ra:

$$\hat{x} = \hat{u}\frac{1}{2D} = \hat{u}\frac{1}{b}\sqrt{mc(1+k^2)} \qquad (7)$$

1.4. Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động tuần hoàn

Thí dụ 1.22 Động cơ có trọng lượng Q đặt thẳng đứng trên móng có trọng lượng G diện tích móng S; độ cứng riêng của đất là λ. Tay quay dài r, thanh truyền dài l, vận tốc góc của trục là Ω = const. Pittông và các phần không cân bằng thực hiện chuyển động tịnh tiến có trọng lượng P. Xác định dao động cưỡng bức bình ổn của móng khi coi tỷ số r/l là nhỏ (hình TD 1.22).



Hình TD 1.22

Lời giải. Độ cứng tương đương của nền

$$c = \lambda S.$$

$$\sin\psi = \frac{r}{l}\sin\varphi;\ \varphi = \Omega t;\ l >> r:$$

$$\cos\psi = 1 - \frac{r^2}{2l^2}\sin^2\Omega t = 1 - \frac{r^2}{4l^2}(1 - \cos 2\Omega t)$$

$$x = r\cos\varphi + l.\cos\psi = (1 - \frac{r^2}{4l^2}) + r\cos\Omega t + \frac{r^2}{4l^2}\cos 2\Omega t$$

$$\ddot{x} = -r\Omega^2\cos\Omega t - \frac{r^2}{l}\Omega^2\cos 2\Omega t$$

Phương trình vi phân dao động thẳng đứng của hệ:

$$\frac{Q+G}{g}\ddot{\xi} + \lambda S\xi = -\frac{P}{g}\ddot{x}$$

Hay

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \frac{Pr\Omega^2}{(Q+G)}(\cos\Omega t + \frac{r}{l}\cos 2\Omega t) \text{ với } \omega_0^2 = \frac{\lambda S g}{(Q+G)}$$

Nghiệm của dao động cưỡng bức bình ổn được tìm ở dạng:

$$\xi = A\cos\Omega t + B\cos 2\Omega t$$

Sau khi thay vào phương trình vi phân, so sánh các hệ số, ta nhận được:

$$A = \frac{P\,r\Omega^2}{(Q+G)(\omega_0^2-\Omega^2)};\qquad B = \frac{r}{l}\cdot\frac{P\,r\Omega^2}{(Q+G)(\omega_0^2-4\Omega^2)}$$

Với $$\xi = \frac{\Pr\Omega^2}{(Q+G)(\omega_0^2-\Omega^2)}\cos\Omega t + \frac{r}{l}\cdot\frac{\Pr\Omega^2}{(Q+G)(\omega_0^2-4\Omega^2)}\cos 2\Omega t.$$

Thí dụ 1.23 Vật khối lượng m, các lò xo có độ cứng là $c/2$, hệ số cản nhớt là b. Kích động động học $u(t)$ có dạng như hình TD1.23. Xác định dao động của vật.

Lời giải. Hàm tuần hoàn $u(t)$ có dạng:

$u(t) = t$, chu kỳ $T = 1$

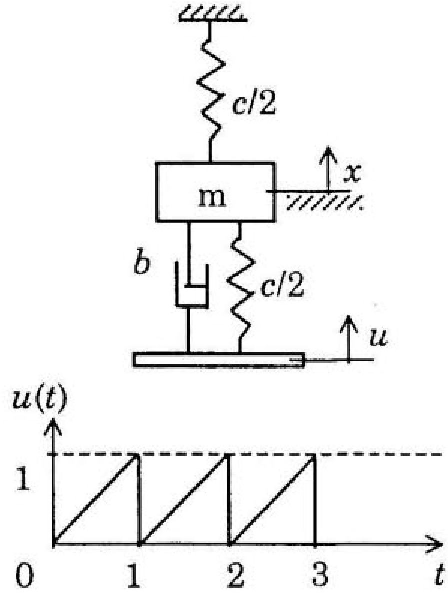
Khai triển $u(t)$ thành chuỗi *Fourier*:

Tính các hệ số

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos k\Omega tdt$$

$$= \int_0^1 t\cos k\Omega tdt = 0$$



Hình TD 1.23

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin k\Omega tdt = 2\int_0^1 t\sin k\Omega tdt = -\frac{1}{k\pi}$$

Do đó:

$$u(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin k\Omega t;\qquad \dot{u}(t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega}{\pi}\cos k\Omega t\,.$$

Lực kích động $F(t) = b\dot{u}(t) + cu(t)$

Phương trình vi phân dao động:

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - cx + F(t);\ hay:\quad m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b\dot{u} + cu$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = b(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Omega}{\pi}\cos k\Omega t) + c(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin k\Omega t)$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \frac{c}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{c}{k\pi}\sin k\Omega t + \frac{b\omega}{\pi}\cos k\Omega t)$$

Vì $$A_k \cos k\Omega t + B_k \sin k\Omega t = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}\sin(k\Omega t + \alpha_k);\ tg\alpha_k = \frac{A_k}{B_k}$$

do đó: $$b\dot{u} + cu = \frac{c}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sqrt{c^2 + b^2k^2\Omega}\sin(k\Omega t + \alpha)$$

Đặt $$\omega_0^2 = \frac{c}{m};\ \eta = \frac{\Omega}{\omega_0};\ D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0}$$

$$F(t) = b\dot{u} + cu = \frac{c}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{k}\sqrt{1 + (2\eta kD)^2}\sin(k\Omega t + \alpha)$$

Nghiệm cưỡng bức bình ổn được tìm dưới dạng:

$$x^* = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\Omega t - \beta_k)$$

Thay x^* vào phương trình vi phân, so sánh các hệ số của $\sin k\Omega t$ và $\cos k\Omega t$, cuối cùng ta được:

$$x^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sqrt{\frac{1 + (2\eta kD)^2}{(1 - k^2\eta^2)^2 + (2\eta kD)^2}}\sin(k\Omega t - \beta_k);\quad tg\beta_k = \frac{2k\eta D}{1 - k^2\eta^2}$$

1.5 Dao động cưỡng bức của hệ chịu kích động không tuần hoàn

Thí dụ 1.24 Vật trọng lượng P được treo vào lò xo có độ cứng c. Tại thời điểm đầu, vật chịu tác dụng của lực không đổi F hướng xuống, kéo dài trong khoảng thời gian τ. Hãy xác định dao động của vật (hình TD1.24).

Lời giải. Xét hai trường hợp

a) Phương trình vi phân chuyển động của vật trong khoảng $0 \le t \le \tau$:

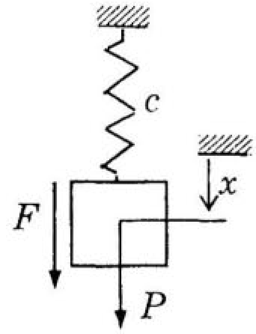
$$\frac{P}{g}\ddot{x} + cx = F$$

Nghiệm được tìm ở dạng:

$$x = \frac{F}{c} + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t;\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{cg}{P}}$$

$$t = 0 : x = 0; \dot{x} = 0 \Rightarrow A = -\frac{F}{c}; B = 0$$

$$x = \frac{F}{c}(1 - \cos\omega_0 t).$$



Hình TD 1.24

b) Phương trình vi phân chuyển động khi $t > \tau$:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} + cx = 0$$

Nghiệm được tìm ở dạng : $x = C\cos\omega_0 t + D\cos\omega_0(t-\tau)$

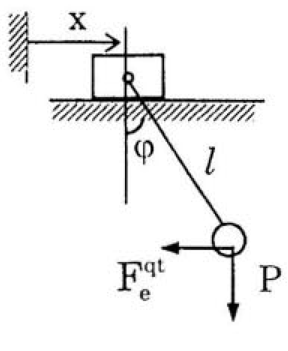
Từ a): $x(\tau) = \frac{F}{c}(1 - \cos\omega_0\tau) \to \dot{x}(\tau) = \frac{F}{c}\omega_0\sin\omega_0\tau$

Từ b): $x(\tau) = C\cos\omega_0\tau + D \to \dot{x}(\tau) = -C\sin\omega_0\tau$

So sánh a) và b): $C = -\frac{F}{c}; D = -C$

Do đó: $x = \frac{F}{c}[\cos\omega_0(t-\tau) - \cos\omega_0 t]; t > \tau$.

Thí dụ 1.25 Con lắc gồm chất điểm nối với đoạn dây không dãn dài l. Xác định dao động nhỏ của con lắc khi điểm treo di chuyển không ma sát trên đường nằm ngang theo luật $x(t) = \xi(t)$ cho trước (hình TD 1.25).



Hình TD 1.25

Lời giải. Lực quán tính theo có giá trị: $F_e^{qt} = m\ddot{x}$

Phương trình vi phân chuyển động tương đối của con lắc:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi + ml\ddot{\xi}\cos\varphi = 0$$

Khi φ nhỏ: $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\frac{\ddot{\xi}}{l}; \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$ (1)

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất ứng với phương trình (1) ở trên dạng

$$\varphi = c_1\sin\omega_0 t + c_2\cos\omega_0 t \qquad (2)$$

Theo phương pháp biến thiên hằng số Lagrange nghiệm của phương trình vi phân (1) được tìm dưới dạng

$$\varphi = c_1(t)\sin\omega_0 t + c_2(t)\cos\omega_0 t$$

$$\dot{\varphi} = \dot{c}_1(t)\sin\omega_0 t + \dot{c}_2(t)\cos\omega_0 t + c_1(t)\omega_0\cos\omega_0 t - c_2(t)\omega_0\sin\omega_0 t$$

$$\dot{c}_1(t)\sin\omega_0 t + \dot{c}_2(t)\cos\omega_0 t = 0.$$

$$\ddot{\varphi} = \dot{c}_1(t)\omega_0\cos\omega_0 t - \dot{c}_2(t)\omega_0\sin\omega_0 t - c_1(t)\omega_0^2\sin\omega_0 t - c_2(t)\omega_0^2\cos\omega_0 t$$

Từ đó suy ra

$$\dot{c}_1(t)\cos\omega_0 t - \dot{c}_2(t)\sin\omega_0 t = -\frac{\ddot{\xi}}{\omega_0 l}$$

$$\dot{c}_1(t)\sin\omega_0 t + \dot{c}_2(t)\cos\omega_0 t = 0.$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính trên ta nhận được

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{\ddot{\xi}}{\omega_0 l}\cos\omega_0 t; \quad \dot{c}_2(t) = \frac{\ddot{\xi}}{\omega_0 l}\sin\omega_0 t$$

Tích phân lên ta được

$$c_1(t) = -\frac{1}{\omega_0 l}\int_0^t \ddot{\xi}\cos\omega_0\tau d\tau + B_1 = -\frac{1}{\omega_0 l}[\dot{\xi}\cos\omega_0 t + \omega_0\int_0^t \dot{\xi}\sin\omega_0\tau d\tau] + B_1$$

$$= \frac{1}{\omega_0 l}[-\dot{\xi}\cos\omega_0 t - \omega_0\xi\sin\omega_0 t + \omega_0^2\int_0^t \xi\cos\omega_0\tau d\tau] + B_1 = A_1(t) + B_1$$

$$c_2(t) = \frac{1}{\omega_0 l}\int_0^t \ddot{\xi}\sin\omega_0\tau d\tau + B_2 = \frac{1}{\omega_0 l}[\dot{\xi}\sin\omega_0 t - \omega_0\int_0^t \dot{\xi}\cos\omega_0\tau d\tau] + B_2$$

$$= \frac{1}{\omega_0 l}[\dot{\xi}\sin\omega_0 t - \omega_0\xi cos\omega_0 t - \omega_0^2\int_0^t \xi\sin\omega_0\tau d\tau] + B_2 = A_2(t) + B_2$$

Do đó dao động nhỏ của con lắc là

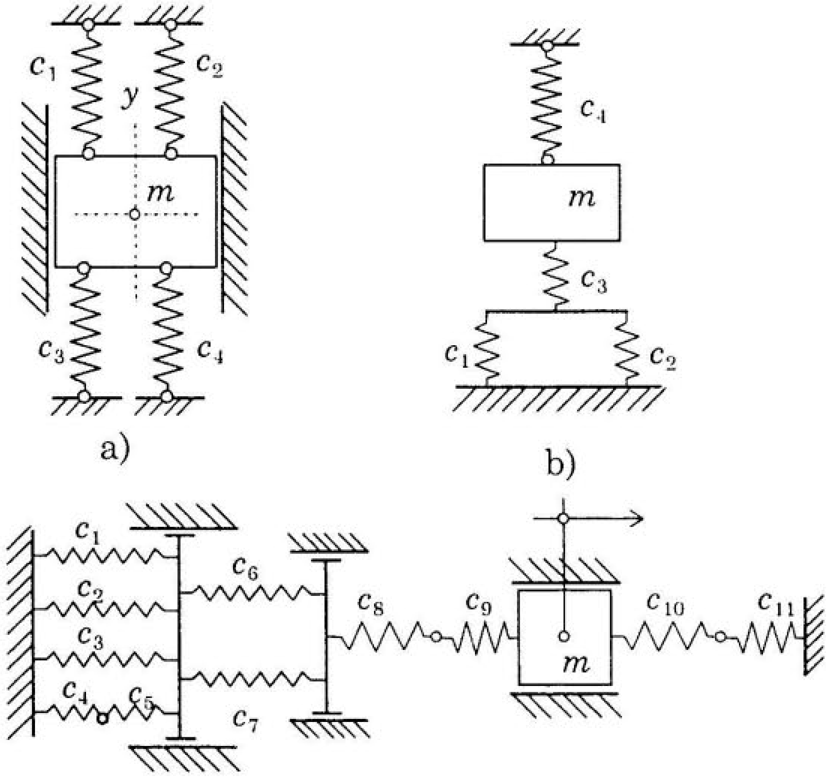
$$\begin{aligned}\varphi &= c_1(t)\sin\omega_0 t + c_2(t)\cos\omega_0 t \\ &= B_1\sin\omega_0 t + B_2\cos\omega_0 t + A_1(t)\sin\omega_0 t + A_2(t)\cos\omega_0 t.\end{aligned} \tag{3}$$

Trong đó các hằng số tích phân B_1 và B_2 được xác định từ các điều kiện đầu.

Bài tập Chương 1

1.1 Dao động tự do không cản

1.1.1 Cho các hệ dao động như hình BT 1.1.1. Hãy xác định tần số dao động riêng của hệ.



Hình BT 1.1.1

Đáp số:

$$a)\ c^* = c_1 + c_2 + c_3 + c_4;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}}$$

$$b)\ c^* = \frac{(c_1 + c_2)c_3}{c_1 + c_2 + c_3} + c_4;$$

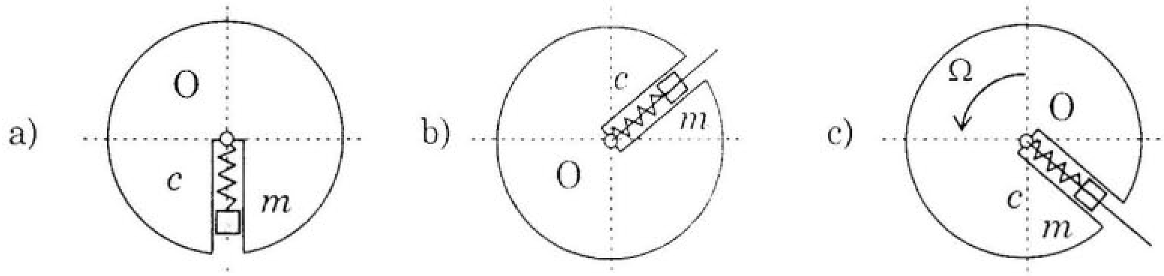
$$c)\ c_4^* = \frac{c_4 c_5}{c_4 + c_5};\quad c_8^* = \frac{c_8 c_9}{c_8 + c_9};\quad c_{10}^* = \frac{c_{10}c_{11}}{c_{10} + c_{11}};$$

$$\frac{1}{c_1^*} = \frac{1}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4^*} + \frac{1}{c_6 + c_7} + \frac{1}{c_8^*};\ c^* = c_1^* + c_{10}^*$$

1.1.2 Trên một đĩa tròn có khoét một rãnh thẳng. Một chất điểm khối lượng m nối với tâm O của đĩa bằng một lò xo và có thể chuyển động không ma sát trong rãnh. Khi lò xo không bị kéo nén, khoảng cách từ tâm O đến chất điểm là e. Độ cứng lò xo là c. Trên hình a và b mặt phẳng đĩa thẳng đứng và đứng yên. Trên hình c mặt phẳng đĩa nằm ngang và đĩa quay đều với vận tốc góc Ω. Xác định

1) Tần số dao động riêng của chất điểm.

2) Biểu thức của nghiệm tổng quát.



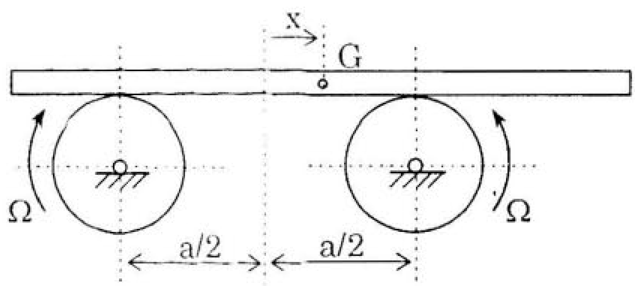
Hình BT 1.1.2

Đáp số:

$$a) \& b): \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}; \quad x = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$

$$c): \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2} \; (\omega_0 > \Omega); \quad x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{e}{1 - (\Omega/\omega_0)^2}$$

1.1.3 Hai con lăn hình trụ tròn có kích thước như nhau quay với vận tốc góc không đổi là Ω nhưng ngược chiều nhau. Trên hai con lăn đặt một tấm phẳng đồng chất trọng lượng $G = mg$. Hệ số ma sát trượt động giữa tấm và mỗi con lăn là μ. Chứng minh rằng chuyển động $x(t)$ của thanh là dao động điều hoà. Hãy xác định tần số riêng của hệ.



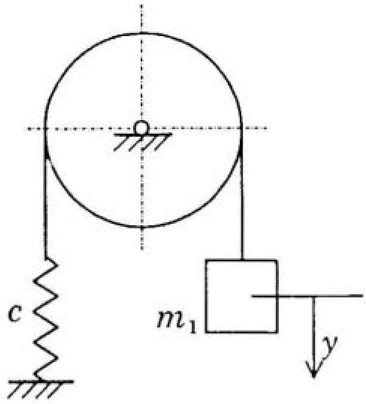
Hình BT 1.1.3

Đáp số: $\ddot{x} + \frac{2\mu g}{a} x = 0; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{2\mu g}{a}}$

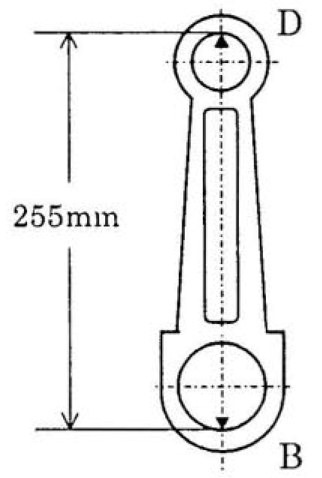
1.1.4 Đĩa có bán kính R, khối lượng m. Lò xo có độ cứng c, vật nặng khối lượng m_1 ban đầu có vận tốc v_0 hướng xuống. Bỏ qua khối lượng lò xo và dây, không có ma sát, không có sự trượt của dây. Xác định chuyển động của vật.

Đáp số:

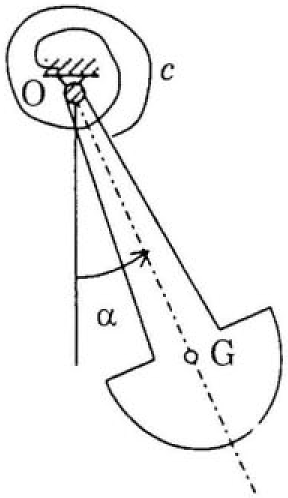
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_1 + m/2}}; \quad y = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$



Hình BT 1.1.4



Hình BT 1.1.5



Hình BT 1.1.6

1.1.5 Tay biên khối lượng m = 0,80 kg được treo lần lượt vào điểm B rồi điểm D. Các tần số riêng tương ứng là:

ω_B = 8,05 s^{-1}; ω_D = 7,58 s^{-1}

Hãy xác định vị trí trọng tâm tay biên, mômen quán tính và bán kính quán tính đối với trục đi qua trọng tâm tay biên.

Đáp số: $CD = d = 140,6\ mm$; $\quad J_C = 3,38.10^3\ kg.mm^2$; $\quad \rho_C = \sqrt{\frac{J_C}{m}} = 65\ mm$

1.1.6 Con lắc trọng lượng Q, mômen quán tính đối với trục quay O là J, khoảng cách từ trọng tâm G đến trục quay là OG = s. Lò xo xoắn có độ cứng c. Tại vị trí cân bằng, con lắc lệch khỏi đường thẳng đứng một góc α. Tìm chu kỳ dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng của con lắc.

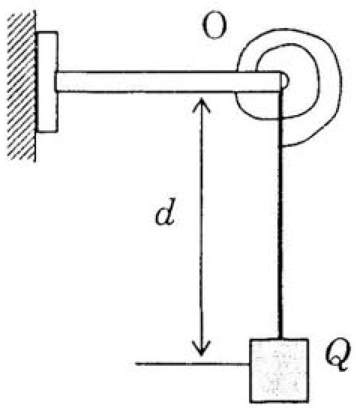
Đáp số: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{Qs\cos\alpha + c}}$.

1.1.7 Dụng cụ đo dao động ngang như hình BT 1.1.7. Mômen quán tính của con lắc đối với trục quay O là J = 0,03 kgcm^2; mômen tĩnh Qd = 4,5 N.cm; độ cứng lò xo c = 4,5 Ncm. Tìm chu kỳ dao động khi góc lệch nhỏ.

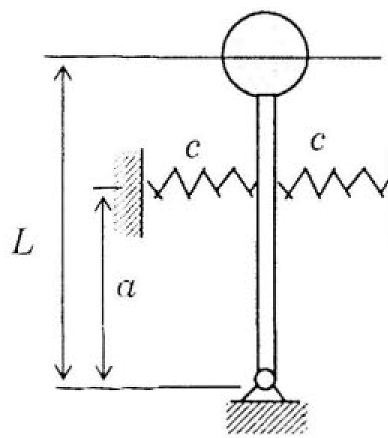
Đáp số: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{c + Qd}} = 0.364\ s$

1.1.8 Con lắc là chất điểm khối lượng m, gắn vào đầu thanh cứng dài L. Hai lò xo cùng có độ cứng c. Hãy xác định khoảng cách a để vị trí cân bằng thẳng đứng là ổn định và tính chu kỳ dao động nhỏ của con lắc.

Đáp số: $a^2 > \dfrac{mgL}{2c}$; $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2ca^2}{mL^2} - \dfrac{g}{L}}}$



Hình BT 1.1.7



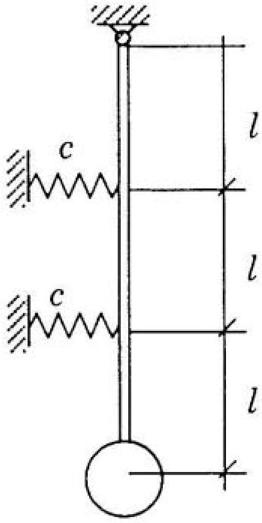
Hình BT 1.1.8

1.1.9 Con lắc gồm chất điểm khối lượng m gắn vào thanh tuyệt đối cứng không trọng lượng, dài $3l$ và được giữ bởi hai lò xo như nhau có độ cứng c. Tìm tần số riêng của con lắc.

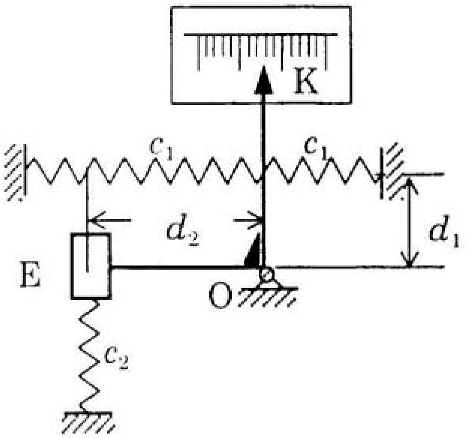
Đáp số: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{5c}{9m} + \dfrac{g}{3l}}$

1.1.10 Dụng cụ đo dao động của nền. Khi cân bằng, đòn OE nằm ngang, lò xo ngang không biến dạng. Đòn và đối trọng có mômen quán tính đối với trục quay O là J. Thiết lập phương trình vi phân dao động bé của kim K và tìm tần số dao động của kim.

Đáp số: $\omega_0^2 = \dfrac{2c_1d_1^2 + c_2d_2^2}{J}$



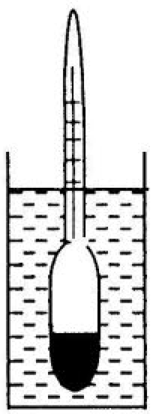
Hình BT 1.1.9



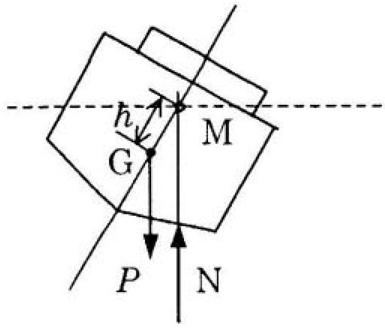
Hình BT 1.1.10

1.1.11 Một phù kế đo trọng lượng riêng của chất lỏng như hình BT 1.1.11. Khối lượng của phù kế là M = 0,0372 kg; đường kính phần nổi trên chất lỏng là d = 0,0064 m; trọng lượng riêng của chất lỏng là γ = 1,20. Tìm chu kỳ dao động thẳng đứng trong chất lỏng của phù kế.

Đáp số: T = 1,97 s.



Hình BT 1.1.11



Hình BT 1.1.12

1.1.12 Dao động lắc của tầu thuỷ được đặc trưng bởi vị trí của trọng tâm G và khuynh tâm M. Vị trí M phụ thuộc hình dạng vỏ tầu, là giao điểm của trục đối xứng và đường tác dụng của lực nâng $\vec{N}$, khoảng cách MG = h. (hình BT 1.1.12) Tầu có trọng lượng P và mômen quán tính đối với trục lắc là J. Chứng minh rằng chu kỳ dao động lắc của tầu khi góc φ nhỏ được cho bởi công thức $T = 2\pi\sqrt{J / Ph}$.

1.1.13 Ống hình chữ U chứa chất lỏng (hình BT 1.1.13). Diện tích tiết diện ngang của ống là A, cột chất lỏng có độ dài L, khối lượng riêng của chất lỏng là γ. Tìm tần số dao động riêng của cột chất lỏng.

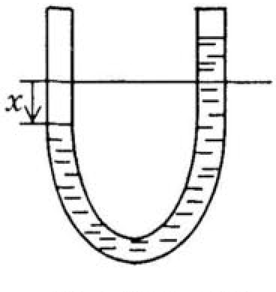
Đáp số: $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}\ s^{-1}$.

1.1.14 Hình trụ tròn bằng gỗ được nhúng một phần vào chất lỏng và luôn thẳng đứng. Hình trụ có trọng lượng riêng σ, bán kính r, chiều cao h. Tìm tần số dao động riêng của trụ trong hai trường hợp:

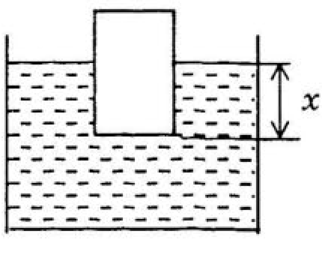
a) Chất lỏng là nước thường.

b) Chất lỏng là nước muối có trọng lượng riêng là $\gamma = 1{,}2$.

Đáp số: a) $\omega = \sqrt{g / h\sigma}$; b) $\omega = \sqrt{1{,}2g / h\sigma}$.



Hình BT 1.1.13

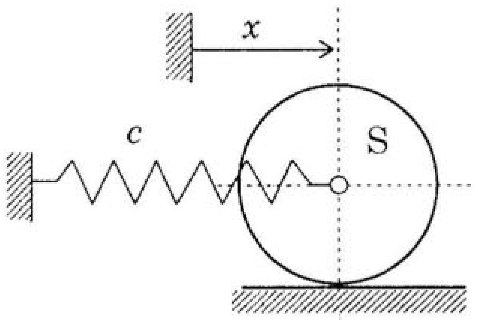


Hình BT 1.1.14

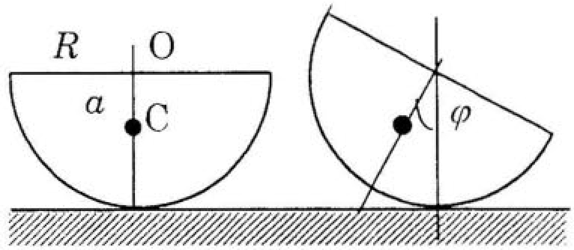
1.1.15 Một đĩa tròn khối lượng m, mômen quán tính đối với khối tâm là J_S, bán kính r được giữ bằng lò xo nằm ngang có độ cứng c như hình (hình BT 1.1.15). Đĩa tròn có thể lăn không trượt qua lại trên mặt phẳng ngang. Hãy xác định tần số dao động riêng của hệ. Bỏ qua ma sát lăn.

Đáp số: $\omega_0 = \sqrt{\frac{cr^2}{mr^2 + J_S}}$

1.1.16 Nửa mặt tròn đồng chất khối lượng M, bán kính R, khoảng cách từ tâm O của mặt tròn đến khối tâm C của mặt là $a = 4R/3\pi$. Tìm chu kỳ dao động khi góc lệch φ là bé.



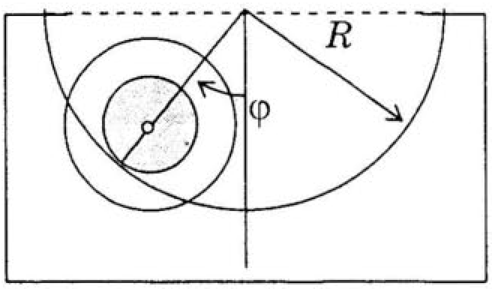
Hình BT 1.1.15



Hình BT 1.1.16

Đáp số: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}\left(\dfrac{9\pi}{8} - 2\right)}$

1.1.17 Đĩa hai tầng khối lượng m, mômen quán tính đối với trục ngang đi qua trọng tâm là J, bán kính tầng trong là r. Đĩa lăn không trượt theo đường máng tròn, bán kính R. Thiết lập phương trình vi phân dao động của đĩa bằng hai phương pháp.



Hình BT 1.1.17

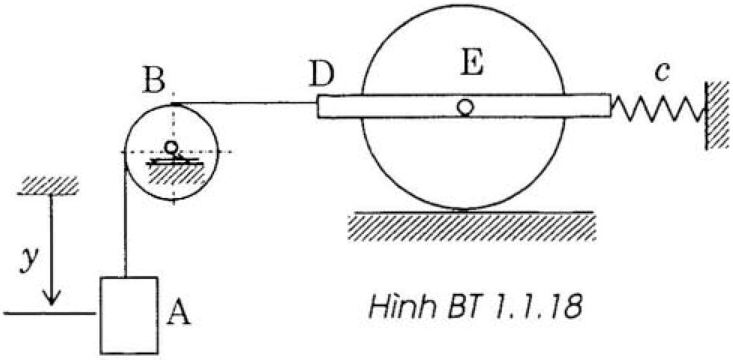
Dùng phương trình Lagrange loại 2.

Dùng nguyên lý d'Alembert.

Xác định tần số dao động riêng khi góc φ bé.

Đáp số: $(J + mr^2)\ddot{\varphi} + mg(\dfrac{r^2}{R - r})\sin\varphi = 0$; $\omega_0^2 = mgr^2/(R - r)(J + mr^2)$

1.1.18 Vật A có khối lượng $m_1 = 1$ kg. Ròng rọc B có khối lượng $m_2 = 0{,}2$ kg, bán kính $r_2 = 2$ cm, thanh đồng chất D có khối lượng $m_3 = 0{,}1$ kg. Đĩa đồng chất E bán kính $r_4 = 4$ cm, thanh E có khối



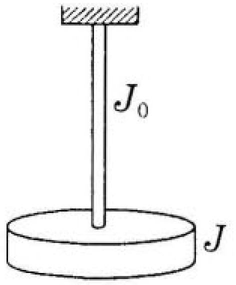
Hình BT 1.1.18

lượng $m_4 = 4$ kg. Lò xo có độ cứng $c = 10$ N/cm. Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ, tìm biên độ dao động nếu tại thời điểm đầu vật A lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn $y_0 = 1$ cm và có vận tốc ban đầu $v_0 = 8$ cm/s.

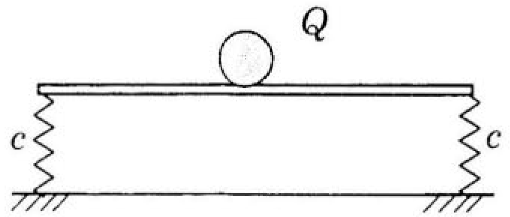
Đáp số: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m_1 + \dfrac{m_2}{2} + m_3 + \dfrac{3}{2}m_4}} = 11.8\ s^{-1}$; $A = 1,21\ cm$

1.1.19 Thanh đàn hồi hình trụ thẳng đứng có đầu trên cố định, đầu dưới gắn vào tâm đĩa nằm ngang. Mômen quán tính của đĩa đối với trục đi qua tâm đĩa là J; mômen quán tính của thanh đối với trục là J_0. hệ số cứng của thanh khi xoắn là c. Xác định chu kỳ dao động của hệ.

Đáp số: $T = 2\pi\sqrt{(J + \dfrac{J_0}{3})/c}$.



Hình BT 1.1.19



Hình BT 1.1.20

1.1.20 Dầm đặt trên hai gối tựa đàn hồi cùng độ cứng $c = 150$ N/cm. Dầm có mômen quán tính của thiết diện ngang là $I = 180$ cm^4; dài $l = 400$ cm; môđun đàn hồi $E = 2.10^6$ N/cm^2. Trọng lượng dầm không đáng kể. Tải trọng $Q = 200$ N đặt ở giữa dầm. Hãy xác định chu kỳ dao động của hệ.

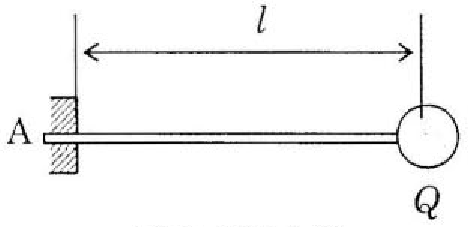
Đáp số: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Q}{g}(\dfrac{l^3}{48EI} + \dfrac{1}{2c}} = 0,238\ s$

1.1.21 Thanh nằm ngang AB dài l, một đầu ngàm, đầu kia có gắn một vật nặng khối lượng m, dao động với chu kỳ T. Mômen quán tính mặt cắt ngang của thanh là I. Xác định mômen đàn hồi E của vật liệu.

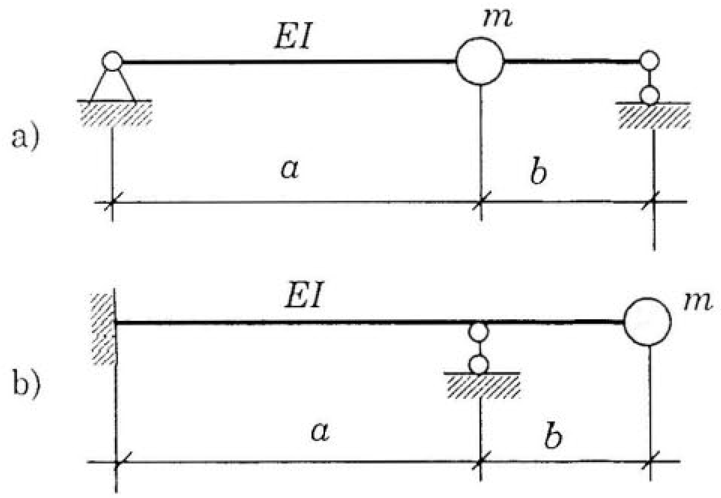
Đáp số: $E = \dfrac{4m\pi^2 l^3}{3IT^2}$.

1.1.22 Cho hệ như hình BT 1.1.22, thiết lập phương trình vi phân dao động của bé của hệ và xác định tần số riêng. Biết độ cứng chống uốn của dầm EI = const. Bỏ qua trọng lượng của thanh.

Đáp số: a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{3EI(a+b)}{ma^2b^2}}$; b) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{12EI}{ma^2(4a+3b)}}$



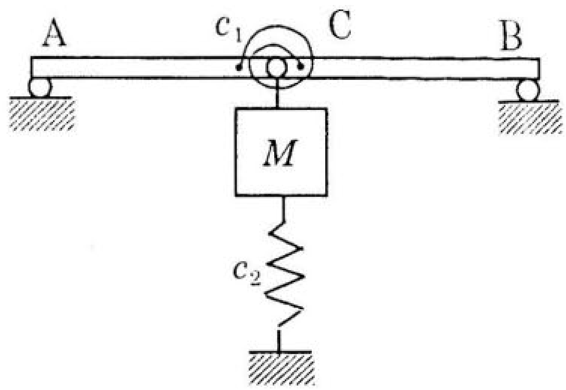
Hình BT 1.1.21



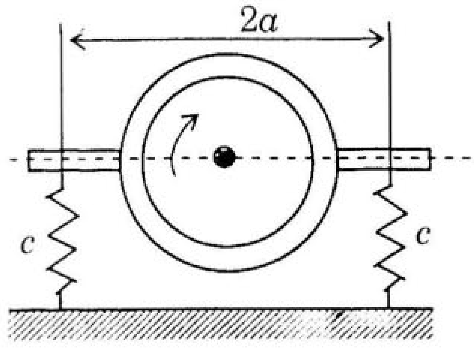
Hình BT 1.1.22

1.1.23 Hai thanh đồng chất cùng dài l, cùng khối lượng riêng m, được nối với nhau bởi bản lề tại C. Hai đầu thanh là các con lăn A và B. Tại C có lò xo xoắn độ cứng c_1 và treo vật khối lượng M, vật này được giữ bởi lò xo thẳng độ cứng c_2. Lập phương trình vi phân chuyển động của hệ khi chọn toạ độ là góc quay φ của thanh.

Đáp số: $(M + \frac{2}{3}m)l^2\ddot{\varphi} + (2c_1 + c_2l^2)\varphi = 0$.



Hình BT 1.1.23



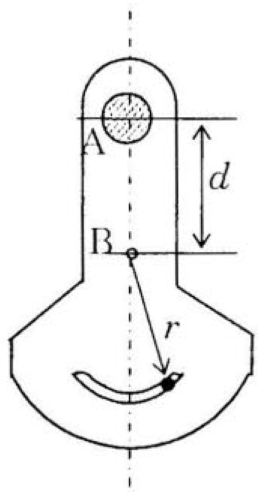
Hình BT 1.1.24

1.1.24 Động cơ điện được đỡ bởi 4 lò xo, mỗi lò xo có độ cứng c (hình BT 1.1.24). Mômen quán tính của động cơ đối với trục quay là J. Tìm tần số dao động của động cơ.

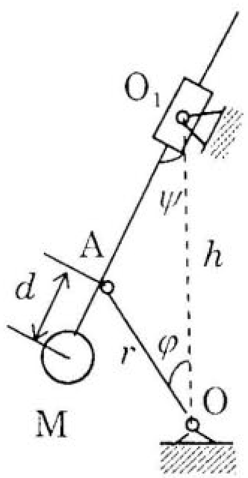
Đáp số: $\omega_0 = 2a\sqrt{c/J}$

1.1.25 Để khử dao động của trục khuỷu trong động cơ máy bay, người ta làm một rãnh tròn bán kính r, có tâm cách trục quay một đoạn AB = d. một chất điểm có thể chuyển động tự do trong rãnh. Hãy xác định tần số dao động nhỏ của chất điểm khi trục quay có vận tốc góc Ω. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực.

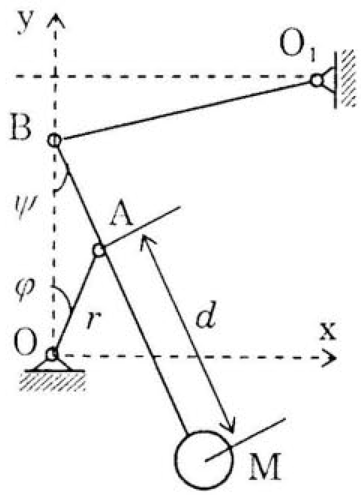
Đáp số: $\omega = \Omega\sqrt{d/r}$.



Hình BT 1.1.25



Hình BT 1.1.26



Hình BT 1.1.27

1.1.26 Con lắc gồm chất điểm M khối lượng m gắn vào thanh cứng, thanh này nối với thanh OA bởi khớp quay A và trượt được trong ống quay O_1. Bỏ qua trọng lượng các thanh, các khoảng cách OA = r, $OO_1 = h$, AM = d, với $h - r < \sqrt{rd}$. Tìm chu kỳ dao động nhỏ của con lắc.

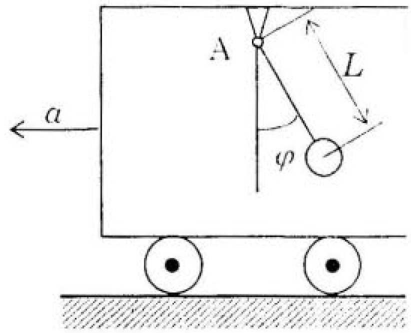
Hướng dẫn: $\dfrac{h}{\varphi + \psi} = \dfrac{r}{\psi} \to \varphi = (\dfrac{h-r}{r})\psi$; khi α bé: $\cos\alpha = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2} + \cdots$;

Đáp số: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r(d+h-r)^2}{g[rd-(h-r)^2]}}$.

1.1.27 Con lắc gồm chất điểm M, khối lượng m, lắp vào cơ cấu 4 khâu như hình BT 1.12.7. Các độ dài OA = AB = r, AM = d. Tại vị trí cân bằng, các thanh OA và BM thẳng đứng, thanh O_1B nằm ngang. Bỏ qua khối lượng các thanh. Hãy tìm chu kỳ dao động nhỏ của con lắc.

Hướng dẫn: $\varphi = \psi$; $\cos\varphi = 1 - \dfrac{\varphi^2}{2} + \cdots$

Đáp số: $T = 2\pi \dfrac{r + d}{\sqrt{g(d - r)}}$.



Hình BT 1.1.28

1.1.28. Một ôtô chạy trên mặt đường nằm ngang với gia tốc a = 4,5 m/s^2. Trong ôtô có treo một con lắc toán học.

a) Xác định vị trí cân bằng và tần số dao động nhỏ của con lắc.

b) So sánh chu kỳ dao động khi ôtô đang chạy (T_S) với chu kỳ dao động của con lắc khi ôtô đứng yên (T_0).

Đáp số: a) $tg\varphi_0 = a/g$; $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}\sqrt{1 + (a/g)^2}$, b) $T_S = 0{,}953T_0$

1.2 Dao động tự do có cản

1.2.1 Vật có khối lượng m = 3 kg dao động tắt dần với chu kỳ dao động T^* = 0,3 s. Sau một chu kỳ dao động biên độ giảm đi hai lần. Xác định hệ số cứng c của lò xo và hệ số cản nhớt δ.

Đáp số: $c = 1.326\ N/cm$; $\omega = 20.9\ s^{-1}$; $\delta = 2.31\ s^{-1}$

1.2.2 Chất điểm dao động tắt dần dưới tác dụng của lực đàn hồi và lực cản nhớt. Hệ số cản Lehr $D = \delta/\omega_0$= 0.1.

a) Xác định tỷ số $\Delta = \dfrac{T^* - T}{T}$ khi coi D là nhỏ (T là chu kỳ dao động tự do, T^* là chu kỳ dao động tắt dần).

b) Biên độ giảm bao nhiêu lần sau 8 chu kỳ dao động ?.

Đáp số: $\Delta = \dfrac{D^2}{2 - D^2}$; $\dfrac{A_0}{A_8} = 156.38$.

1.2.3 Một vật có khối lượng $m = 0,6$ kg được treo vào một lò xo. Khi không có lực cản ($b = 0$) vật dao động với chu kỳ $T_1 = 0,4\pi$ s. Khi có lực cản tỉ lệ bậc nhất với vận tốc ($b \neq 0$), vật dao động với chu kỳ $T_2 = 0,5\pi$ s. Lúc đầu cho vật lệch khỏi vị trí cân bằng 4 cm và tự dao động.

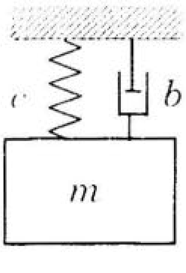
Hãy tìm giá trị lực cản lúc vận tốc bằng 1 cm/s và xác định dao động của vật.

Đáp số: $b = 3.6\ kg/s$; $F = bv = 0.0036\ N$; $x = 5e^{-3t}\sin(4t + arctg\dfrac{4}{3})$.

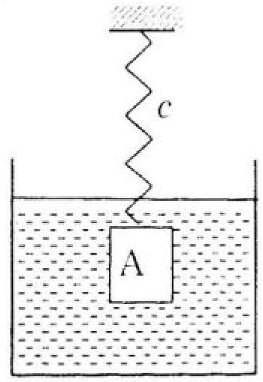
1.2.4 Đo độ nhớt của chất lỏng bằng thực nghiệm: Treo tấm A vào lò xo và cho dao động trong không khí, đo được chu kỳ dao động T_1. Thả tấm vào chất lỏng và cho dao động, đo được chu kỳ dao động T_2. Lực ma sát giữa tấm và chất lỏng được tính theo công thức $F_{ms} = 2\,S\eta v$ (S – diện tích một mặt của tấm; v – vận tốc; η – độ nhớt của chất lỏng). Trọng lượng của tấm là P. Bỏ qua ma sát giữa tấm và không khí.

Xác định độ nhớt của chất lỏng.

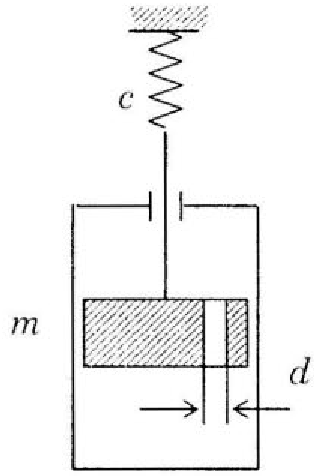
Đáp số: $\eta = \dfrac{2\pi P}{gST_1T_2}\sqrt{T_2^2 - T_1^2}$



Hình BT 1.2.3



Hình BT 1.2.4



Hình BT 1.2.5

1.2.5 Bộ tắt chấn thuỷ lực như hình BT 1.2.5. Pittông có các lỗ chuyển động trong chất lỏng. Lúc đầu $t = 0$ pittông lệch khỏi vị trí cân bằng một đoạn $y_0 = 5$ mm. Xác định thời gian để di chuyển của pittông đối với vị trí cân bằng giảm đi 2 lần. Hệ số cản nhớt thu gọn $b = [4\pi\mu H / z.m](D/d)^4$. Biết hệ số cứng lò xo $c = 3$ kN/m; đường kính xylanh $D = 0,1$ m; đường kính lỗ $d = 10$ mm; số lỗ $z = 25$; khối lượng pittông $m = 2,73$ kg; chiều cao pittông $H = 50$ mm; hệ số nhớt $\mu = 6.10^{-2}$ Ns/m^2

Đáp số: $t_1 = 0.114$ s.

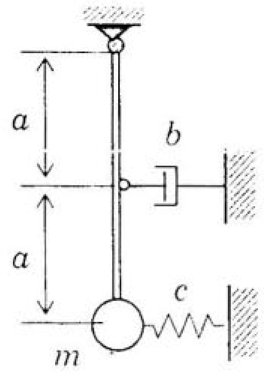
1.2.6 Chất điểm khối lượng m được gắn vào đầu của một thanh nhẹ có thể bỏ qua trọng lượng. Thanh được nối vào lò xo có độ cứng c và chịu cản như hình BT 1.2.6. Hãy xác định:

a) Phương trình vi phân dao động của hệ.

b) Hệ số cản nhớt b để hệ có dao động nhỏ.

c) Độ cản Lehr để sau 10 chu kỳ biên độ dao động còn 1/10 giá trị đầu.

d) Chu kỳ dao động tự do không cản



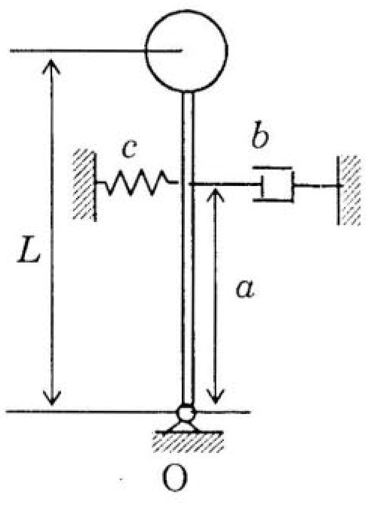
Hình BT 1.2.6

Đáp số: $\ddot{\varphi} + \dfrac{b}{4m}\dot{\varphi} + \left(\dfrac{c}{m} + \dfrac{g}{2a}\right)\varphi = 0$

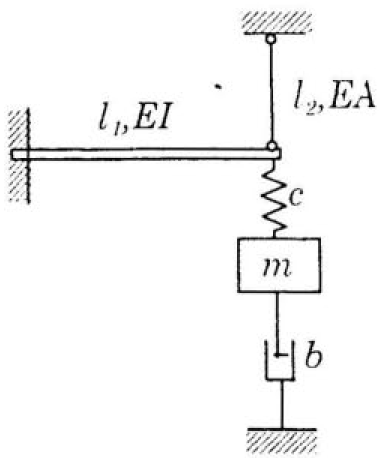
$b < 8\sqrt{mc + \dfrac{gm^2}{2a}}$; $D = 0,037$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2am}{2ac + gm}}$.

1.2.7 Chất điểm khối lượng m được gắn một đầu thanh cứng tuyệt đối dài L, khối lượng không đáng kể. Thanh được giữ ở vị trí cân bằng bởi một lò xo và bộ giảm chấn thuỷ lực với hệ số cản nhớt b. Xác định tần số dao động riêng và độ tắt lôga. Biết m = 1 kg; L = 0,5 m; a = 0,2 m; đường kính lò xo D = 50 mm; đường kính dây lò xo d = 5 mm, số vòng i = 5; môđun đàn hồi $G = 80.10^9$ N/m^2, hệ số cản nhớt $b = 3.10^2$ kg/s. Độ cứng lò xo được tính theo công thức $c = Gd^4/(8D^3 i)$.

Đáp số: $\omega_0 = 40,2$ s^{-1}; $\omega = 32,3$ s^{-1} $\Lambda = 3,74$.



Hình BT 1.2.7



Hình BT 1.2.8

1.2.8 Cho mô hình dao động như hình BT 1.2.8. Hãy xác định tần số dao động tự do tắt dần. Bỏ qua khối lượng của thanh và của dầm.

Đáp số:

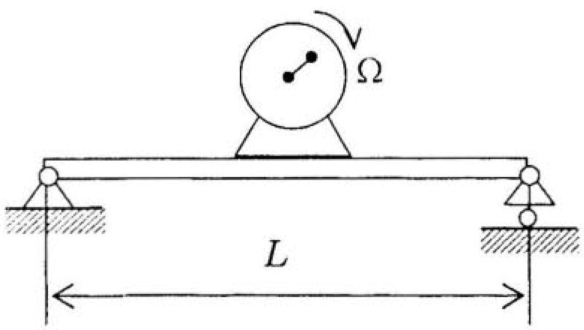
$$c^* = c\left(\frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2}\right) / \left(c + \frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2}\right);\ \omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{m}};\ \delta = \frac{b}{2m};\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

1.3 Dao động cưỡng bức, kích động điều hoà

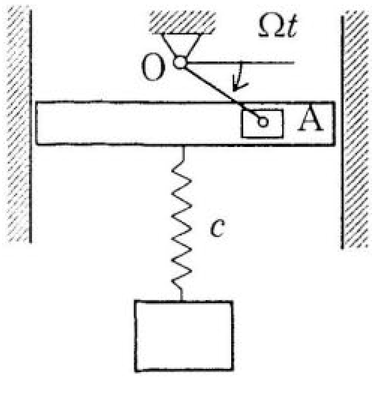
a. Dao động cưỡng bức không cản

1.3.1 Hai dầm ngang song song, mỗi dầm dài L = 10 m, trọng lượng không đáng kể, mômen quán tính của tiết diện ngang mỗi dầm I = 8881 cm^4; môđun đàn hồi $E = 2.10^7$ N/cm^2. Động cơ đặt ở giữa dầm có trọng lượng Q = 15000 N, trọng lượng của phần lệch tâm G = 4 N, độ lệch tâm r = 5 cm; quay với vận tốc góc Ω = 25 rad/s. Tìm dao động cưỡng bức của dầm. Động cơ quay với vận tốc góc bằng bao nhiêu vòng/phút thì có cộng hưởng.

Đáp số: $y = 0{,}0017 \sin 25t$ cm; n = 321,1 vg/ph.



Hình BT 1.3.1



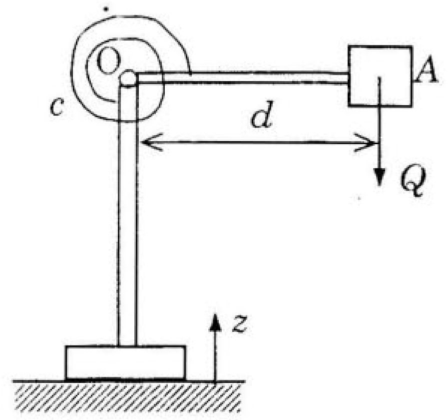
Hình BT 1.3.2

1.3.2 Tay quay OA = 10 cm; quay quanh O với vận tốc góc Ω = 5 rad/s. Vật nặng có trọng lượng G = 4 N. Độ cứng của lò xo c = 0,2 N/cm. Tìm dao động cưỡng bức của vật nặng.

Đáp số: $y = 20{,}4 \sin 5t$ cm.

1.3.3 Bộ ghi rung đặt trên móng. Móng rung theo quy luật $z = 0{,}2\sin 25t$ cm. Hệ số cứng của lò xo xoắn $c = 0{,}1$ N.cm. Tải trọng và thanh có mômen quán tính đối với trục quay là $J = 0{,}4$ kg.cm^2, mômen tĩnh $Q.d = 10$ Ncm. Bỏ qua dao động riêng của thanh. Tìm chuyển động quay tương đối của OA. Khi cân bằng tương đối, OA nằm ngang.

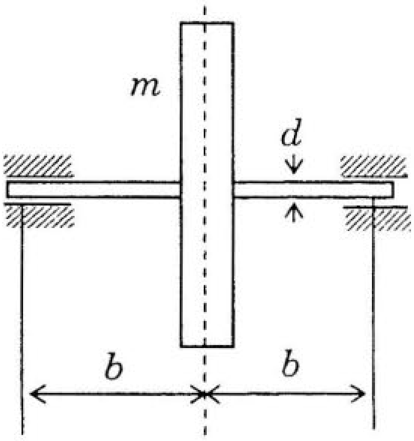
Đáp số: $\varphi = 0{,}0051\sin 25t$.



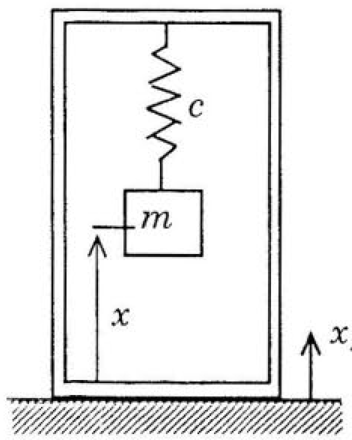
Hình BT 1.3.3

1.3.4 Rotor có khối lượng $m = 13{,}6$ kg; lượng lệch tâm $e.\Delta m = 0{,}2879$ kgcm. Khoảng cách từ tâm rotor đến mỗi ổ đỡ là $b = 0{,}4064$ m. Trục thép có đường kính d. Xác định áp lực tại hai ổ đỡ khi rotor quay với vận tốc góc $n = 6000$ vòng/phút trong hai trường hợp: a) $d = 2{,}54$ cm; b) $d = 1{,}905$ cm. Cho biết môđun đàn hồi của thép E $= 200.10^9$ N/m^2.

Đáp số: a) $N_A = N_B = 1273$ N; b) $N_A = N_B = 241{,}1$ N.



Hình BT 1.3.4



Hình BT 1.3.5

1.3.5 Dụng cụ ghi dao động thẳng đứng như hình BT 1.3.5. Giả sử nền dao động theo quy luật $x_M = A\sin\Omega t$.

a) Lập phương trình dao động tương đối của khối lượng m so với khung.

b) Biết tần số dao động riêng của dụng cụ là $\omega_0 = 10\pi$ s^{-1}. Khi đặt dụng cụ vào một điểm N của máy, máy quay đều với $n = 120$ vòng/phút thì dụng cụ ghi được biên độ dao dao động tương đối là $\hat{x} = 2$ mm. Xác định biên độ dao động, biên độ vận tốc và gia tốc dao động theo phương thẳng đứng của điểm N.

Đáp số: $a)\ x^* = \dfrac{A\eta^2}{1-\eta^2}\sin(\Omega t - \alpha);\ \eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$

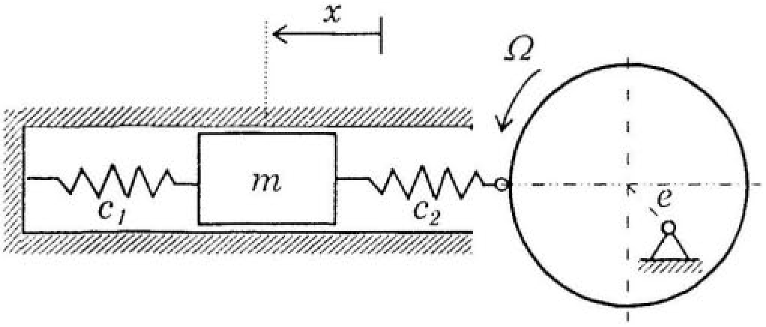
$b)\ A = \hat{x}(1-\eta^2)/\eta^2 = 10{,}5\text{ mm};\ A\Omega = 131{,}88;\ A\Omega^2 = 1656{,}41\text{ mm/s}^2.$

1.3.6 Một vật có khối lượng *m* được nối với tường qua lò xo có độ cứng c_1, chịu kích động bởi cơ cấu cam thông qua lò xo có độ cứng c_2 như hình BT 1.3.6. Cho biết cam là một đĩa tròn bán kính *r*, độ lệch tâm *e* và quay đều với vận tốc góc Ω. Giả thiết đầu của lò xo c_2 luôn tiếp xúc với bề mặt nhẵn của cam.

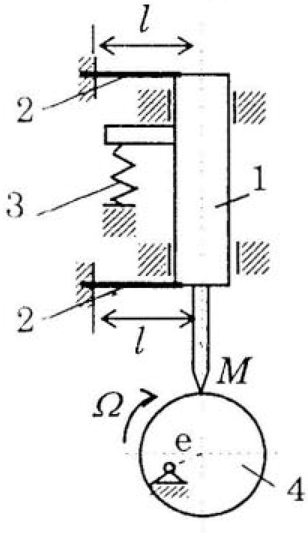
a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của khối lượng *m*

b) Xác định vận tốc góc Ω để biên độ cực đại của dao động cưỡng bức bình ổn bằng 3*e*.

Đáp số: $m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x = c_2 e \sin\Omega t$, $\Omega_1^2 = \dfrac{3c_1 + 2c_2}{3m}$, $\Omega_2^2 = \dfrac{3c_1 + 4c_2}{3m}$



Hình BT 1.3.6



Hình BT 1.3.7

1.3.7 Đầu đo để kiểm tra biên dạng các chi tiết tròn xoay (phát hiện sự lệch tâm hình học cua chi tiết) gồm thanh cứng 1 có khối lượng *m* được giữ bởi lò xo lá 2. Lò xo xoắn ốc 3 được dùng để giữ cho thanh đo 1 và chi tiết cần kiểm tra 4 tiếp xúc với nhau. Nếu chi tiết cần kiểm tra 4 không tròn (có độ lệch tâm *e*), thì khi chi tiết 4 quay với vận tốc góc Ω, thanh 1 sẽ dao động thẳng đứng. Giả sử khi không có lệch tâm (e=0), lực nén giữa thanh và chi tiết tại M là R_0. Hãy tìm:

a) Vận tốc góc giới hạn Ω^* của chi tiết khi có độ lệch tâm để đảm bảo thanh 1 luôn tiếp xúc với chi tiết 4.

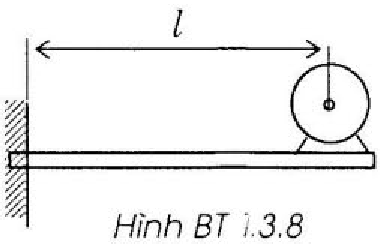
b) Lực nén giữa thanh và chi tiết khi $\Omega = 0,1\Omega^*$.

Biết: $m = 0,05$ kg; $R_0 = 5$ N; $d_1 = 50$ mm; $e = 0.1$ mm; lò xo lá dài $l = 30$ mm, tiết diện $A = b.h = 5.\ 0,5$ mm^2; môđun đàn hồi $E = 200.10^9$ N/m^2. Đường kính lò xo xoắn ốc $D = 5$ mm; đường kính dây lò xo $d = 1$ mm; số vòng $i = 10$; môđun trượt $G = 80.10^9$ N/m^2.

Hướng dẫn: độ cứng của lò xo lá $c_1 = EA/l$; độ cứng lò xo xoắn ốc $c_2 = Gd^4/(8iD^3)$

Đáp số: $\Omega^* = \sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m} + \dfrac{R_0}{e.m}} = 1116\ s^{-1}$; $R \approx (5 \pm 1,3)\ N$

1.3.8 Hai dầm song song nằm ngang bị ngàm vào tường, ở đầu tự do của 2 dầm có động cơ điện. Môđun đàn hồi của dầm là $E = 2.10^6$ N/cm^2, khoảng cách từ tường tới trục động cơ là $l = 150$ cm, trọng lượng của dầm được bỏ qua. Động cơ có trọng lượng $Q = 1200$ N, phần quay có trọng lượng $P = 200$ N, độ lệch tâm $e = 0,005$ cm, vận tốc góc $n = 1500$ vòng/phút.



Hình BT 1.3.8

Xác định mômen quán tính thiết diện ngang của dầm để cho biên độ dao động cưỡng bức $A = 0,05$ cm.

$$Đáp\ số: I = \frac{l^3\Omega^2}{6gE}\left(Q \pm \frac{cP}{A}\right) = 7,06(1200 \pm 20),\ \Omega = \frac{\pi n}{30}$$

$$\Rightarrow I = 8\ 613\ \text{cm}^4 \text{ hoặc } I = 8330\ \text{cm}^4.$$

b. Dao động cưỡng bức có cản

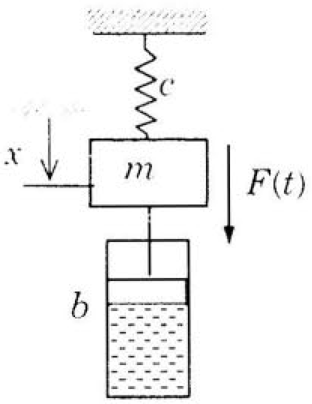
1.3.9 Hệ dao động như hình BT 1.3.9. Khối lượng $m = 981$ kg; độ cứng lò xo $c = 98,1$ N/cm, hệ số cản nhớt của chất lỏng $b = 196,2$ kg/s. Lực kích động $F(t) = 0,5\sin\Omega t + 0,1\sin 2\Omega t$ (N).

a) Tìm dao động cưỡng bức của hệ.

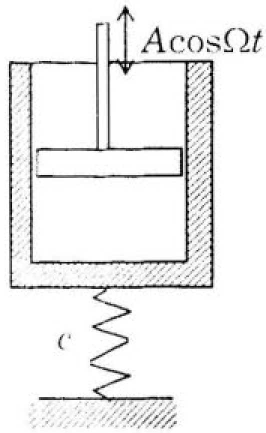
b) Hiện tượng cộng hưởng xảy ra khi Ω bằng bao nhiêu ?

Đáp số: a) $$x = \frac{0,5\sin(\Omega t + \alpha_1)}{981\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} + \frac{0,1\sin(2\Omega t + \alpha_2)}{981\sqrt{(\omega_0^2 - 4\Omega^2)^2 + 16\delta^2\Omega^2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c}{m};\ \delta = \frac{b}{2m};\ tg\alpha_1 = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2};\ tg\alpha_2 = -\frac{4\delta\Omega}{\omega_0^2 - 4\Omega^2}.$$ b) $\Omega = \omega_0$ & $\Omega = \dfrac{\omega_0}{2}$.



Hình BT 1.3.9

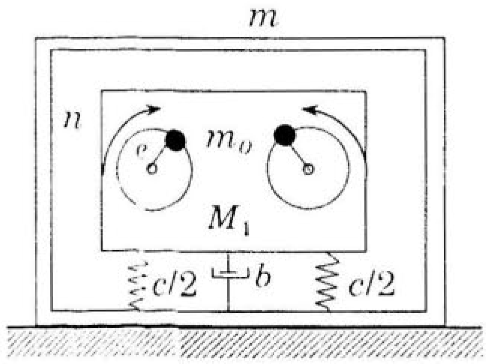


Hình BT 1.3.10

1.3.10 Xylanh có khối lượng m được đỡ bởi lò xo với độ cứng c. Píttông dao động trong xylanh theo luật $y = A\cos\Omega t$ với hệ số ma sát nhớt là b. Tìm biên độ dao động của xylanh và pha của nó đối với píttông.

Đáp số: $y_c = \dfrac{bA\Omega}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2}}$; $tg\alpha = \dfrac{b\Omega}{c - m\Omega^2}$.

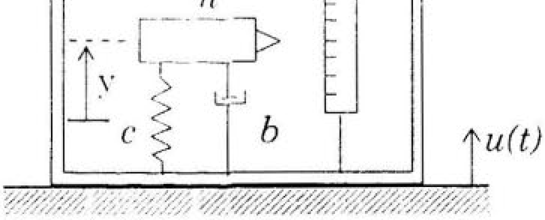
1.3.11 Một máy đầm đất gồm có thân máy khối lượng M_1 đặt trên lò xo và có cản nhớt như hình BT 1.3.11, hai khối lượng m_0 có lệch tâm e quay đều với tốc độ n (vòng/phút) ngược chiều nhau. Khối lượng vỏ máy là m. Hãy xác định các tham số: độ cứng c, độ cản Lehr D (cản nhỏ) để máy làm việc ở chế độ cộng hưởng và không bật lên khỏi nền. Xác định áp lực lên nền.



Hình BT 1.3.11

Đáp số: $M = M_1 + 2m_0$; $c = M(\dfrac{\pi n}{30})^2$; $D \geq \dfrac{m_0 ec}{M(M+m)g}$

1.3.12 Máy đo dao động gồm vật nặng khối lượng m, được giữ bởi lò xo có độ cứng c và bộ giảm chấn thuỷ lực với lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc tương đối ($R = b\dot{y}$; y là di chuyển tương đối của khối lượng m đối với máy). Tìm chuyển động mà máy ghi



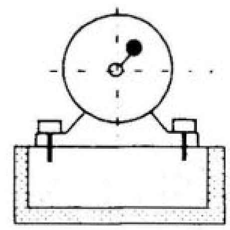
Hình BT 1.3.12

được $y(t)$ khi nền dao động theo quy luật $u(t) = u_0(\sin\Omega t + 2\sin 10\Omega t)$.

Biết $\omega_0^2 = c/m = 0.01\Omega^2$; $\delta = b/2m = 0.02\Omega$.

Đáp số: $y = u_0\sin(\Omega t - \alpha_1) + 2u_0\sin(10\Omega t - \alpha_2)$

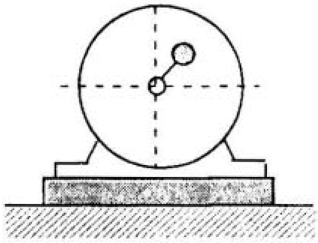
1.3.13 Động cơ điện có khối lượng m_0 = 68 kg, được cố định trên móng có khối lượng m_1 = 1200 kg. Tần số dao động riêng của cả hệ là ω_0 = 16,75 rad/s với độ cản Lehr D = 0.10. Lượng lệch tâm của động cơ gây ra lực kích động là $F = 100\sin 31.4t$. Xác định biên độ dao động của móng và lực truyền xuống đất.



Hình BT 1.3.13

Đáp số: A = 0.0111 cm; F_{td} = 42 N.

1.3.14 Động cơ điện có trọng lượng Q = 50 N, trên trục động cơ có tải trọng không cân bằng p = 0.2 N cách trục quay một khoảng r = 6 cm. Động cơ được đặt trên đệm giảm chấn có độ cứng c = 500 N/cm. Khi động cơ quay đều với vận tốc góc n = 980 v/phút, mô tơ dao động theo phương thẳng đứng, tỷ số biên độ giảm liên tiếp theo quy luật A_n/A_{n+1} = 10/9. Hãy xác định biên độ và góc pha dao động cưỡng bức của động cơ.



Hình BT 1.3.14 và 1.3.15

Đáp số: A = 0,38 cm; $\alpha = 58{,}8^0$.

1.3.15 Động cơ điện có khối lượng toàn bộ m = 45,35 kg, lượng lệch tâm m_0e = 0,23 kgm quay đều với vận tốc góc n =1000 v/ph. Độ cản Lehr của bộ giảm chấn D = 0,2. Các lò xo được chọn sao cho độ lớn của lực cưỡng bức truyền xuống nền chỉ còn 10 % (hàm khuếch đại $V(\eta, D) = 0{,}1$).

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ

b) Xác định độ cứng tương đương của các lò xo

c) Xác định giá trị lớn nhất của lực truyền xuống nền.

Đáp số:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + cq = m_0 e\Omega^2 \sin\Omega t,\ \Omega = \pi n/30$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 4{,}72 \rightarrow \omega_0 = 22{,}19\ rad/s$$

$$c^* = m\omega_0^2 = 22323\ N/m;\ \ F_{td} = 0.1 m_0 e\Omega^2 = 252{,}22\ N$$

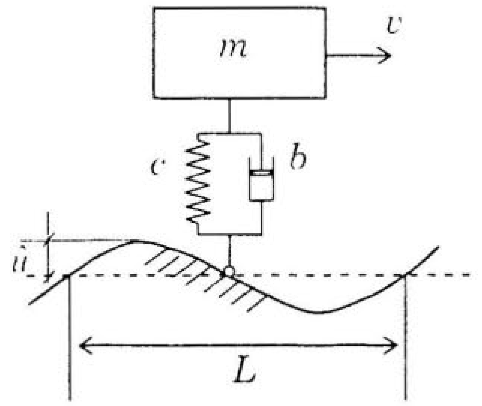
1.3.16 Xe khối lượng m chuyển động đều với vận tốc v trên đường gập ghềnh $u(t) = \hat{u}\sin\Omega t$. Bộ giảm chấn có độ cứng c và hệ số cản nhớt b. (hình BT 1.3.16).

a) Lập phương trình vi phân dao động thẳng đứng của khối lượng m.

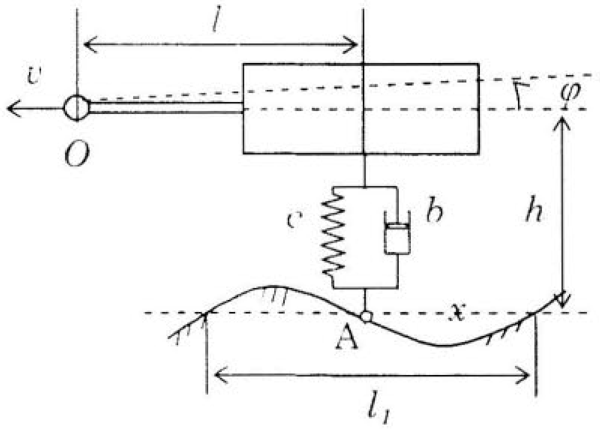
b) Xác định biên độ dao động của khối lượng m.

Đáp số: a) $m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = \hat{u}(c.\sin\Omega t + b\Omega.\cos\Omega t)$

$$\text{b) } A = \frac{\hat{u}\sqrt{c^2 + b^2\Omega^2}}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2}}; \ \Omega = \frac{2\pi}{L}v.$$



Hình BT 1.3.16



Hình BT 1.3.17

1.3.17 Rơmoóc có khối lượng m chuyển động với vận tốc không đổi v trên đường gập ghềnh. Mômen quán tính của vật đối với O là J_0. Độ cứng của lò xo là c; hệ số cản nhớt là b. Mặt đường được mô tả bởi phương trình $h = h_0(1 - \cos 2\pi\, x/l_1)$; $x = vt$. Coi điểm O không có di chuyển thẳng đứng và $h \ll l$ (nghĩa là khi vật quay một góc φ dẫn đến di chuyển thẳng đứng của điểm A). Bỏ qua khối lượng của bánh xe và coi độ cứng của lốp là rất lớn so với độ cứng của lò xo.

Hãy xác định vận tốc của chuyển động ổn định khi biên độ dao động đạt giá trị cực đại.

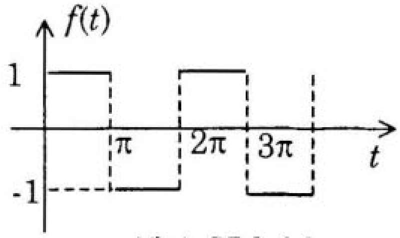
Đáp số: $v^* = \dfrac{l}{2\pi}\sqrt{-\omega_0^4/2\delta^2 + \sqrt{\omega_0^8/4\delta^4 + \omega_0^6/\delta^2}}$; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$; $\delta = b/2m$.

1.4 Dao động cưỡng bức khi kích động tuần hoàn và kích động bất kỳ

1.4.1 Vật có khối lượng $m = 5$ (đơn vị) được treo vào lò xo có độ cứng $c = 20$ (đơn vị). Vật chịu kích động bởi lực tuần hoàn như hình BT 1.4.1.

a) Phân tích $f(t)$ thành chuỗi *Fourier*

b) Xác định dao động cưỡng bức bình ổn của vật.



Hình BT 1.4.1

Đáp số: a) $f(t) = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t + \ldots)$

b) $x = 1,69\sin t - 0,34\sin 3t + 0,048\sin 5t - \ldots$

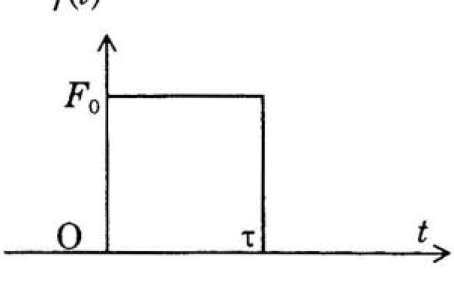
1.4.2 Vật có khối lượng m được treo bởi lò xo có độ cứng c. Tại thời điểm đầu, vật chịu lực $F_0 = \text{const}$ và kéo dài trong khoảng thời gian τ (Hình BT 1.4.2). Xác định chuyển động của vật trong các giai đoạn

$0 < t < \tau$ và $t > \tau$.

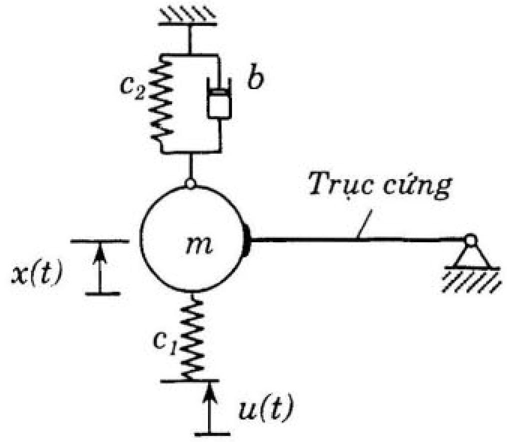
Đáp số:

$$0 < t < \tau : x = \frac{F_0}{c}(1 - \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t);$$

$$t > \tau : x = \frac{F_0}{c}[\cos\sqrt{\frac{c}{m}}(t-\tau) - \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t]$$



Hình BT 1.4.2



Hình BT 1.4.3

1.4.3 Trên Hình BT 1.4.3 là mô hình dao động của hệ thống bánh trước của ô tô, trong đó bánh xe được mô hình hóa bởi lò xo có động cứng c_1, giảm sóc là phần tử đàn hồi - cản nhớt. Cho biết c_1=300 N/mm, c_2=70 N/mm, hệ số cản b = 2500Ns/m, khối lượng m = 40 kg. Giả thiết kích động $u(t)$ có dạng hàm bước nhảy: $u(t) = u_0$ khi t>0 với u_0 = 50 (mm).

a) Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của khối lượng m.

b) Tính toán dao động cưỡng bức của khối lượng m

c) Xác định biên độ dao động cưỡng bức lớn nhất.

Đáp số: a) $m\ddot{x} + b\dot{x} + (c_1 + c_2)x = c_1 u(t)$

b) $$x(t) = \frac{c_1 u_0}{c_1 + c_2}\left[1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}}\cos(\omega t - \beta)\right]$$

Với $\omega_0 = 96{,}2\ (1/s)$; $D = 0{,}325$; $\omega = 90{,}0\ (1/s)$; $\beta = 0{,}331$

c) x_{max} = 54,3 (mm)

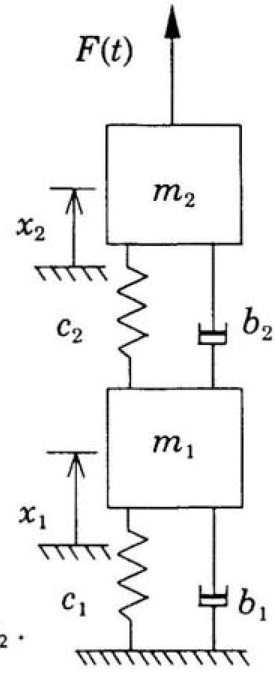
Chương II

Dao động tuyến tính của hệ hữu hạn bậc tự do

2.1 Thành lập phương trình vi phân dao động

2.1.1 *Sử dụng phương trình Lagrange loại 2*

Thí dụ 2.1 Cho mô hình dao động như hình TD 2.1. Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.



Hình TD 2.1

Lời giải. Ở trạng thái cân bằng tĩnh, các lò xo biến dạng các đoạn δ_{10}, δ_{20}:

$$\begin{aligned} c_1\delta_{10} &= (m_1 + m_2)g, \\ c_2\delta_{20} &= m_2 g. \end{aligned} \qquad (1)$$

Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_1, x_2 tương ứng là độ lệch của các khối lượng so với vị trí cân bằng tĩnh.

Động năng và thế năng của cơ hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1\left(x_1 - \delta_{10}\right)^2 + \frac{1}{2}c_2\left(x_2 - x_1 - \delta_{20}\right)^2 + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 .$$

Hàm hao tán của cơ hệ:

$$\Phi = \frac{1}{2}b_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_2\left(\dot{x}_2^2 - \dot{x}_1^2\right).$$

Các lực suy rộng của các lực hoạt động không có thế là:

$$Q_{x_1}^* = 0, \quad Q_{x_2}^* = F(t).$$

Biểu thức lực suy rộng:

$$Q_i = -\frac{\partial\Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i} + Q_i^*, \quad (i = 1,\dots,n),$$

$$Q_{x_1} = -c_1(x_1 - \delta_{10}) + c_2(x_2 - x_1 - \delta_{20}) - m_1 g - b_1\dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1),$$
$$Q_{x_2} = -c_2(x_2 - x_1 - \delta_{20}) - m_2 g - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + F(t).$$

Sử dụng (1) nhận được:

$$\begin{aligned} Q_{x_1} &= -(c_1 + c_2)x_1 + c_2 x_2 - (b_1 + b_2)\dot{x}_1 + b_2\dot{x}_2 \\ Q_{x_2} &= c_2 x_1 - c_2 x_2 + b_2\dot{x}_1 - b_2\dot{x}_2 + F(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2:

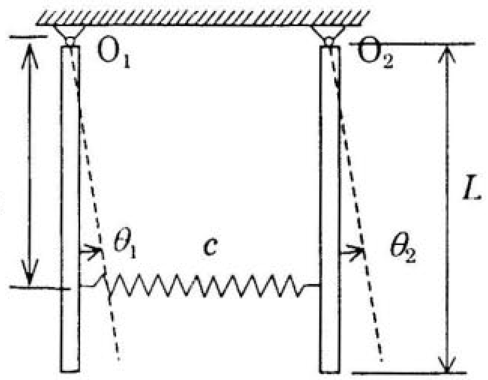
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad \text{i} = 1, ..., \text{n},$$

chúng ta nhận được hệ phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (b_1 + b_2)\dot{x}_1 - b_2\dot{x}_2 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 = 0, \\ m_2\ddot{x}_2 - b_2\dot{x}_1 + b_2\dot{x}_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = F(t). \end{cases}$$

Nhận xét: Nếu chọn x_1, x_2 là độ lệch so với vị trí cân bằng tĩnh của cơ hệ thì biểu thức thế năng cơ hệ không chứa các trọng lượng m_1g, m_2g.

Thí dụ 2.2 Thiết lập phương trình vi phân dao động nhỏ của cơ hệ có hai thanh đồng chất, khối lượng m, chiều dài L nối với nhau bằng lò xo có độ cứng c. Ở vị trí cân bằng các thanh thẳng đứng, lò xo không biến dạng.



Hình TD 2.2

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng (θ_1, θ_2), với θ_1, θ_2 tương ứng là góc lệch của các thanh so với vị trí thẳng đứng.

Động năng và thế năng của cơ hệ:

$$T = \frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{3}\dot{\theta}_2^2,$$

$$\Pi = -mg\frac{L}{2}\cos\theta_1 - mg\frac{L}{2}\cos\theta_2$$
$$+\frac{c}{2}\left[\left(a\sin\theta_2 - a\sin\theta_1\right)^2 + \left(a\cos\theta_2 - a\cos\theta_1\right)^2\right].$$

Các lực suy rộng:

$$Q_{\theta_1} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta_1 + ca^2\left[\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\cos\theta_1 - \left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\sin\theta_1\right],$$

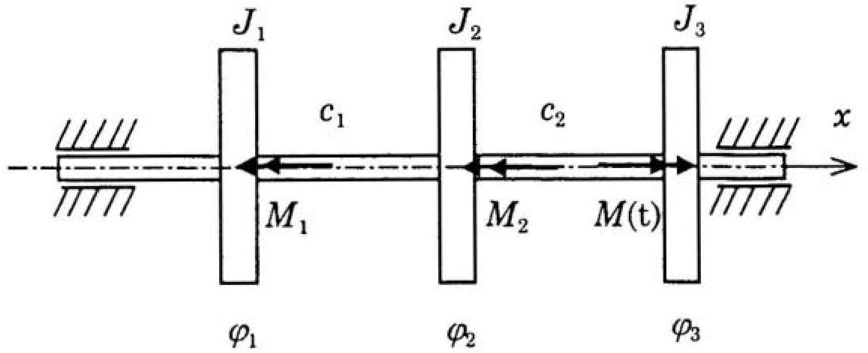
$$Q_{\theta_2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta_2 + ca^2\left[-\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)\cos\theta_2 + \left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)\sin\theta_2\right].$$

Xét dao động nhỏ nên $sin\theta_1 \approx \theta_1$, $sin\theta_2 \approx \theta_2$, $cos\theta_1 \approx 1$, $cos\theta_2 \approx 1$ do đó

$$Q_{\theta_1} = -\left(mg\frac{L}{2} + ca^2\right)\theta_1 + ca^2\theta_2, \quad Q_{\theta_2} = ca^2\theta_1 - \left(mg\frac{L}{2} + ca^2\right)\theta_2.$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2 chúng ta có phương trình vi phân dao động nhỏ của cơ hệ xung quanh vị trí cân bằng:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_1 + \left(mg\dfrac{L}{2} + ca^2\right)\theta_1 - ca^2\theta_2 = 0, \\ \dfrac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_2 - ca^2\theta_1 + \left(mg\dfrac{L}{2} + ca^2\right)\theta_2 = 0. \end{cases}$$



Hình TD 2.3

Thí dụ 2.3 Cơ cấu truyền động của máy tiện được mô hình thành thành hệ ba đĩa có mômen quán tính đối với trục quay x là J_1, J_2, J_3. Ngẫu lực ma sát nhớt ở các ổ đỡ tỉ lệ với vận tốc góc. Các đoạn trục có độ cứng xoắn là c_1, c_2 và khối lượng không đáng kể. Mômen xoắn của động cơ truyền qua dây đai là $M(t)$. Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, với φ_1, φ_2, φ_3 tương ứng là góc quay của các đĩa.

Động năng và thế năng của cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}_3^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}c_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2.$$

Các ngẫu lực cản: $M_1 = -b_1\dot{\varphi}_1, \qquad M_2 = -b_2\dot{\varphi}_2$.

Biểu thức các lực suy rộng của các lực không có thế là:

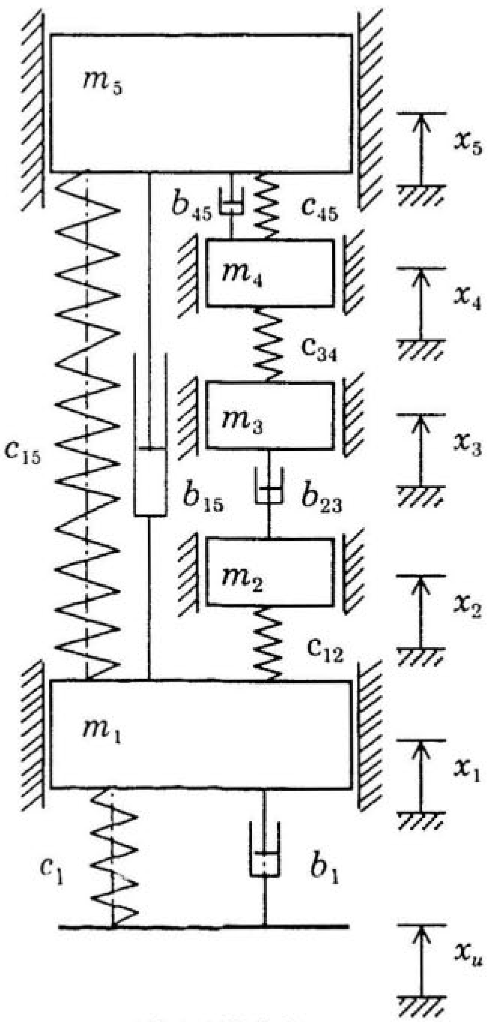
$$Q_1^* = -b_1\dot{\varphi}_1, \qquad Q_2^* = -b_2\dot{\varphi}_2, \qquad Q_3^* = M(t).$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2, nhận được phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 + b_1\dot{\varphi}_1 + c_1\varphi_1 - c_1\varphi_2 = 0, \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + b_2\dot{\varphi}_2 - c_1\varphi_1 + (c_1 + c_2)\varphi_2 - c_2\varphi_3 = 0, \\ J_3\ddot{\varphi}_3 - c_3\varphi_2 + c_3\varphi_3 = M(t). \end{cases}$$

Thí dụ 2.4 Cho mô hình hệ dao động 5 bậc tự do chịu kích động động học $x_u = x_u(t)$. Các khối lượng chỉ có thể thực hiện dao động thẳng đứng. Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, trong đó x_i là dịch chuyển của khối lượng m_i $(i = 1 \div 5)$ kể từ vị trí cân bằng tĩnh .



Hình TD 2.4

Động năng, thế năng và hàm hao tán của cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_4^2 + \\ + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_5^2.$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1\left(x_1 - x_u\right)^2 + \frac{1}{2}c_{12}\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{1}{2}c_{34}\left(x_4 - x_3\right)^2 + \frac{1}{2}c_{45}\left(x_5 - x_4\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}c_{15}\left(x_5 - x_1\right)^2.$$

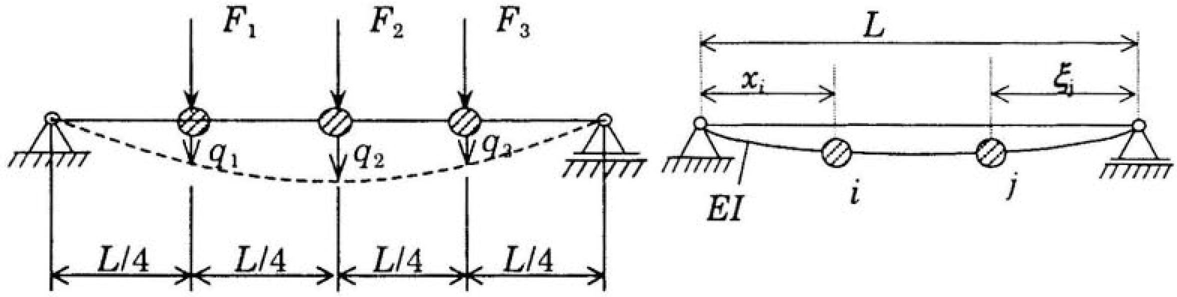
$$\Phi = \frac{1}{2}b_1\left(\dot{x}_1 - \dot{x}_u\right)^2 + \frac{1}{2}b_{23}\left(\dot{x}_3 - \dot{x}_2\right)^2 + \frac{1}{2}b_{45}\left(\dot{x}_5 - \dot{x}_4\right)^2 + \frac{1}{2}b_{15}\left(\dot{x}_5 - \dot{x}_1\right)^2.$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2, nhận được phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + (b_1 + b_{15})\dot{x}_1 - b_{15}\dot{x}_5 + (c_1 + c_{12} + c_{15})x_1 - c_{12}x_2 - c_{15}x_5 = b_1\dot{x}_u(t) + c_1 x(t),\\
&m_2\ddot{x}_2 + b_{23}\dot{x}_2 - b_{23}\dot{x}_3 - c_{12}x_1 + c_{12}x_2 = 0,\\
&m_3\ddot{x}_3 - b_{23}\dot{x}_2 + b_{23}\dot{x}_3 + c_{34}x_3 - c_{34}x_4 = 0,\\
&m_4\ddot{x}_4 + b_{45}\dot{x}_4 - b_{45}\dot{x}_5 - c_{34}x_3 + (c_{34} + c_{45})x_4 - c_{45}x_5 = 0,\\
&m_5\ddot{x}_5 - b_{15}\dot{x}_1 - b_{45}\dot{x}_4 + (b_{15} + b_{45})\dot{x}_5 - c_{15}x_1 - c_{45}x_4 + (c_{15} + c_{45})x_5 = 0.
\end{aligned}$$

2.1.2 *Phương pháp lực*

Thí dụ 2.5 Thiết lập phương trình vi phân dao động của dầm không trọng lượng mang ba khối lượng tập trung m_1, m_2, m_3; môđun đàn hồi của dầm là E, mômen quán tính của mặt cắt ngang là I.



Hình TD 2.5

Lời giải. Trước hết chúng ta tính các hệ số ảnh hưởng d_{ij} của ma trận độ mềm **D** theo công thức:

$$d_{ij} = \frac{1}{6}\cdot\frac{x_i\xi_j}{LEI}(L^2 - x_i^2 - \xi_j^2).$$

Các thành phần của ma trận **D** được tính như sau:

$$d_{11} = \frac{3L^3}{256EI}, \quad d_{12} = \frac{11L^3}{768EI}, \quad d_{13} = \frac{7L^3}{768EI},$$

$$d_{21} = d_{12}, \quad d_{22} = \frac{L^3}{48EI}, \quad d_{23} = \frac{11L^3}{786EI},$$

$$d_{31} = d_{13}, \quad d_{32} = d_{23}, \quad d_{33} = \frac{3L^3}{256EI}.$$

$$\mathbf{D} = \frac{L^3}{768EI} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Sử dụng định luật Hooke suy rộng:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Df}. \tag{2}$$

Khi các khối lượng dao động xung quanh vị trí cân bằng tĩnh các lực tác dụng f_i bao gồm lực quán tính $-m_i\ddot{q}_i$ và ngoại lực $F_i(t)$. Ta có:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Thay thế (1) và (3) vào (2), nhận được phương trình:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} - \mathbf{D} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{mL^3}{768EI} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{768EI} \cdot \begin{bmatrix} 9F_1 + 11F_2 + 7F_3 \\ 11F_1 + 16F_2 + 11F_3 \\ 7F_1 + 11F_2 + 9F_3 \end{bmatrix}.$$

2.2 Dao động tự do không cản

Thí dụ 2.6 Mô hình hệ thống treo ôtô được đơn giản hoá như hình TD 2.6.a. Cho $m_1 = 200$ kg, $m_2 = 800$ kg, $c_1 = 6.10^5$ N/m, $c_2 = 5.10^4$ N/m. Xác định các tần số riêng và các dạng dao động riêng của cơ hệ.

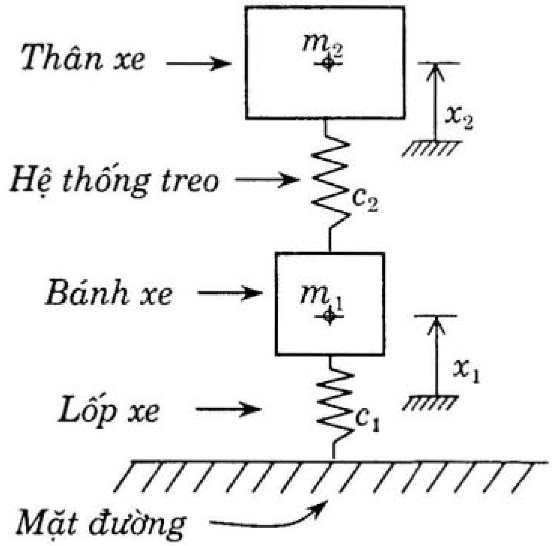
Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), trong đó x_1, x_2 là độ lệch của các khối lượng m_1, m_2 so với vị trí cân bằng tĩnh.

Phương trình vi phân dao động của cơ hệ có dạng:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận khối lượng, ma trận độ cứng của cơ hệ là:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$



Hình TD 2.6.a

Phương trình tần số có dạng:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \omega^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Với các giá trị đã cho, tìm được các tần số riêng:

$$\omega_1^2 = 57{,}6 \Rightarrow \omega_1 = 7{,}6 \quad \text{rad/s},$$
$$\omega_2^2 = 3255 \Rightarrow \omega_2 = 57 \quad \text{rad/s}.$$

Tương ứng với các tần số riêng, các vec tơ riêng được xác định từ phương trình:

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 - \omega_k^2 m_1 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - \omega_k^2 m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Với ω_1: $\quad (c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2)\cdot a_{11} - c_2 a_{21} = 0 \Rightarrow \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = 12{,}8$,

♦ Với ω_2: $\quad -c_2 a_{12} + (c_2 - m_2\omega_2^2)\cdot a_{22} = 0 \Rightarrow \dfrac{a_{22}}{a_{12}} = -0,02.$

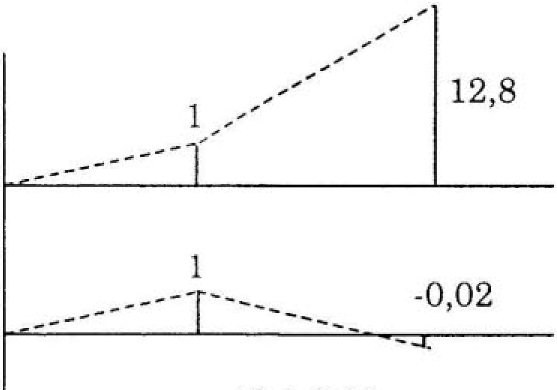
Như vậy ma trận dạng riêng của cơ hệ là:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12,8 & -0,02 \end{bmatrix}.$$

Các dạng riêng được biểu diễn trên hình 2.6.b.

Dạng riêng 1: Thân xe và bánh xe dao động cùng pha. Thân xe dịch chuyển gấp 12,8 lần trục bánh xe, nhưng tần số khá thấp: thấp hơn 3 vòng/s.

Dạng riêng 2: Thân xe và bánh xe dao động ngược pha. Thân xe dịch chuyển ít hơn 0,02 lần so với trục bánh xe. Dạng dao động này gợi ý cho việc thiết kế xe chở khách.



Hình 2.6.b

Thí dụ 2.7 Mô hình dao động ngang của toà nhà 3 tầng. Xem rằng khối lượng của các tầng bằng nhau $m_1 = m_2 = m_3 = m = 262,69.10^3$ kg, độ cứng uốn của các bức tường ở các tầng là $c_1 = 3c$, $c_2 = 2c$, $c_3 = c = 88,56.10^6$ N/m. Xác định các tần số riêng và các dạng dao động riêng của cơ hệ.

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ (x_1, x_2, x_3), là các độ lệch ngang của các khối lượng m_1, m_2, m_3 so với vị trí cân bằng thẳng đứng.

Biểu thức động năng và thế năng của hệ có dạng:

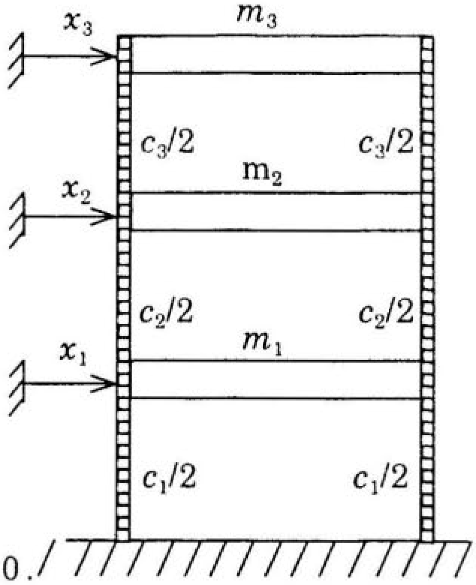
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^3,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}c_3(x_3 - x_2)^2.$$

Phương trình vi phân dao động nhỏ của cơ hệ xung quanh vị trí cân bằng $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, với ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của cơ hệ là:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}.$$



Hình TD 2.7.a

Phương trình tần số của cơ hệ có dạng:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - \omega^2 m_1 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 - \omega^2 m_2 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 - \omega^2 m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Đặt $\lambda = \omega^2 \dfrac{m}{c}$, phương trình tần số là $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda - 6 = 0$. Các nghiệm của phương trình tương ứng với các tần số riêng:

$$\lambda_1 = 0,4158 \quad \Rightarrow \omega_1 = 11,84 \ \text{ rad/s},$$
$$\lambda_2 = 2,2943 \quad \Rightarrow \omega_2 = 27,81 \ \text{ rad/s},$$
$$\lambda_3 = 6,2899 \quad \Rightarrow \omega_3 = 46,05 \ \text{ rad/s}.$$

Phương trình xác định các vectơ riêng có dạng:

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda_k & -2 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda_k & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Suy ra:

$$\begin{cases} (5 - \lambda_k) a_{1k} - 2a_{2k} = 0, \\ -a_{2k} + (1 - \lambda_k) a_{3k} = 0. \end{cases}$$

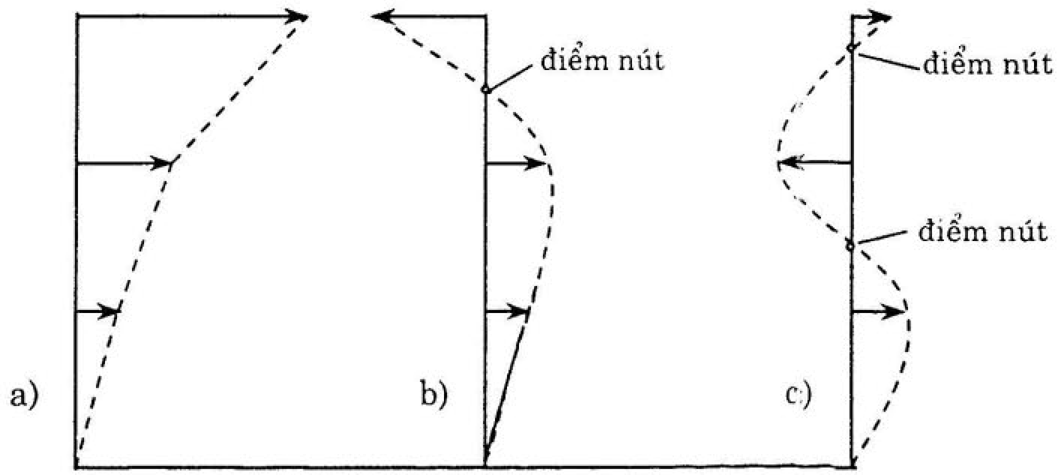
Do đó tương ứng các tần số riêng chúng ta có các dạng dao động riêng là:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,29 \\ 3,92 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,35 \\ -1,04 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,64 \\ 0,12 \end{bmatrix}.$$

Ma trận dạng riêng:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2,29 & 1,35 & -0,64 \\ 3,92 & -1,04 & 0,12 \end{bmatrix}.$$

Các dạng riêng được biểu diễn trên hình TD 2.7.b.



Hình TD 2.7.b

(a) *Dạng riêng 1*: Các khối lượng dao động cùng pha, dịch chuyển tăng theo chiều cao.

(b) *Dạng riêng 2*: Khối lượng m_1, m_2 dao động cùng pha, khối lượng m_3 dao động ngược pha. Xuất hiện "điểm nút" ở vị trí giữa m_2 và m_3.

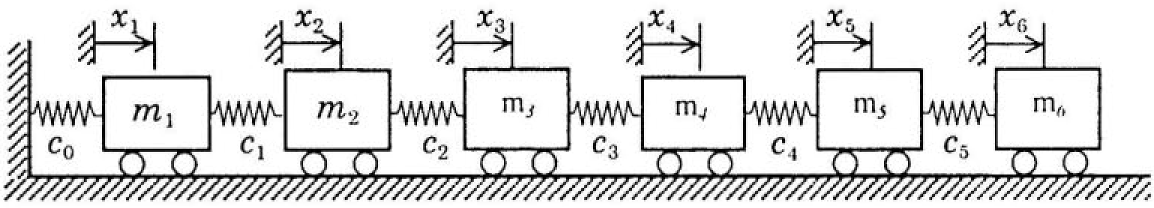
(c) *Dạng riêng 3*: Khối lượng m_1, m_3 dao động cùng pha, khối lượng m_2 dao động ngược pha. Xuất hiện 2 "điểm nút" ở các vị trí giữa m_2 và m_3.

Có thể suy ra nhận xét đối với toà nhà n tầng: ở dạng dao động riêng thứ k sẽ có $(k-1)$ điểm nút.

Thí dụ 2.8 Cho mô hình dao động gồm sáu vật rắn như hình TD 2.8.a

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

b) Cho $m_1 = 2m$, $m_2 = 5m$, $m_3 = 10m$, $m_4 = 3m$, $m_5 = 6m$, $m_6 = 8m$, $c_0 = c$, $c_1 = 2c$, $c_2 = 4c$, $c_3 = 6c$, $c_4 = 2c$, $c_5 = 5c$. Hãy xác định các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của cơ hệ.



Hình TD 2.8

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, trong đó x_i là di chuyển của vật thể có khối lượng m_i (i = 1÷6) tính từ vị trí cân bằng tĩnh.

Biểu thức động năng và thế năng của cơ hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}m_4\dot{x}_4^2 + \frac{1}{2}m_5\dot{x}_5^2 + \frac{1}{2}m_6\dot{x}_6^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_0x_1^2 + \frac{1}{2}c_1\left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{1}{2}c_2\left(x_3 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}c_3\left(x_4 - x_3\right)^2 + \frac{1}{2}c_4\left(x_5 - x_4\right)^2 + $$
$$+\frac{1}{2}c_5\left(x_6 - x_5\right)^2.$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2, nhận được phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + \left(c_0 + c_1\right)x_1 - c_1x_2 &= 0,\\
&m_2\ddot{x}_2 - c_1x_1 + \left(c_1 + c_2\right)x_2 - c_2x_3 &= 0,\\
&m_3\ddot{x}_3 - c_2x_2 + \left(c_2 + c_3\right)x_3 - c_3x_4 &= 0,\\
&m_4\ddot{x}_4 - c_3x_3 + \left(c_3 + c_4\right)x_4 - c_4x_5 &= 0,\\
&m_5\ddot{x}_5 - c_4x_4 + \left(c_4 + c_5\right)x_5 - c_5x_6 &= 0,\\
&m_6\ddot{x}_6 \qquad\qquad -c_5x_5 + c_5x_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Ma trận khối lượng và ma trận độ cứng của cơ hệ là:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_6 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_0 + c_1 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & -c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5 \end{bmatrix}.$$

Phương trình tần số: $\left|\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M}\right| = 0$. Đặt $\lambda = \dfrac{m}{c}\omega^2$, ta có phương trình:

$$\lambda^6 - \frac{979}{120}\lambda^5 + \frac{85823}{3600}\lambda^4 - \frac{27383}{900}\lambda^3 + \frac{19099}{1200}\lambda^2 - \frac{4091}{1800}\lambda + \frac{1}{30} = 0.$$

Giải phương trình trên thu được các nghiệm như sau:

$\lambda_1 = 0{,}0165$, tương ứng $\omega_1 = 0{,}1285\sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

$\lambda_2 = 0{,}1932$, tương ứng $\omega_2 = 0{,}4396\sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

$\lambda_3 = 0{,}9436$, tương ứng $\omega_3 = 0{,}9714\sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

$\lambda_4 = 1{,}6127$, tương ứng $\omega_4 = 1{,}2699\sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

$\lambda_5 = 2{,}0591$, tương ứng $\omega_5 = 1{,}4349\sqrt{\dfrac{c}{m}}$;

$\lambda_6 = 3{,}3332$, tương ứng $\omega_6 = 1{,}8257\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Các véctơ riêng $\mathbf{v}_i$ tương ứng với các tần số riêng ω_i ($i = 1 \div 6$) là:

$$\mathbf{v}_1 = [\ 1{,}0000\ \ 1{,}4835\ \ 1{,}6946\ \ 1{,}7887\ \ 2{,}0266\ \ 2{,}0816\ ]^T,$$

$$\mathbf{v}_2 = [\ 1{,}0000\ \ 1{,}3068\ \ 1{,}1445\ \ 0{,}6678\ \ -0{,}9560\ \ -1{,}3839\ ]^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = [\ 1{,}0000\ \ 0{,}5564\ \ -0{,}3216\ \ -0{,}4012\ \ -0{,}0720\ \ 0{,}1412\ ]^T,$$

$$\mathbf{v}_4 = [\ 1{,}0000\ \ -0{,}1127\ \ -0{,}4419\ \ 0{,}5263\ \ 2{,}1577\ \ -1{,}3654\ ]^T,$$

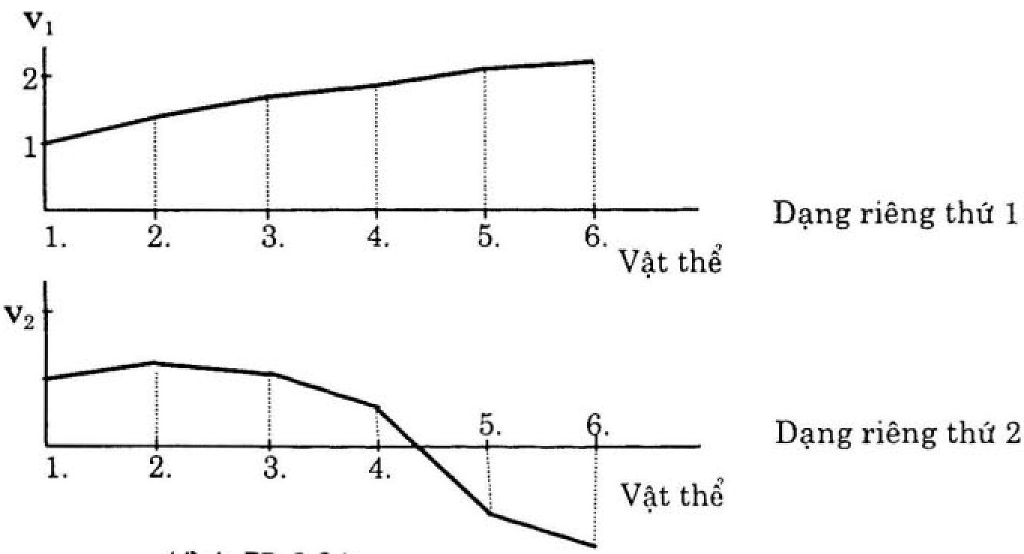
$$\mathbf{v}_5 = [\ 1{,}0000\ \ -0{,}5591\ \ 0{,}1004\ \ 0{,}1955\ \ -0{,}1231\ \ 0{,}0536\ ]^T,$$

$$\mathbf{v}_6 = [\ 1{,}0000\ \ -1{,}8332\ \ 4{,}3883\ \ -15{,}8426\ \ 2{,}6749\ \ -0{,}6173\ ]^T.$$

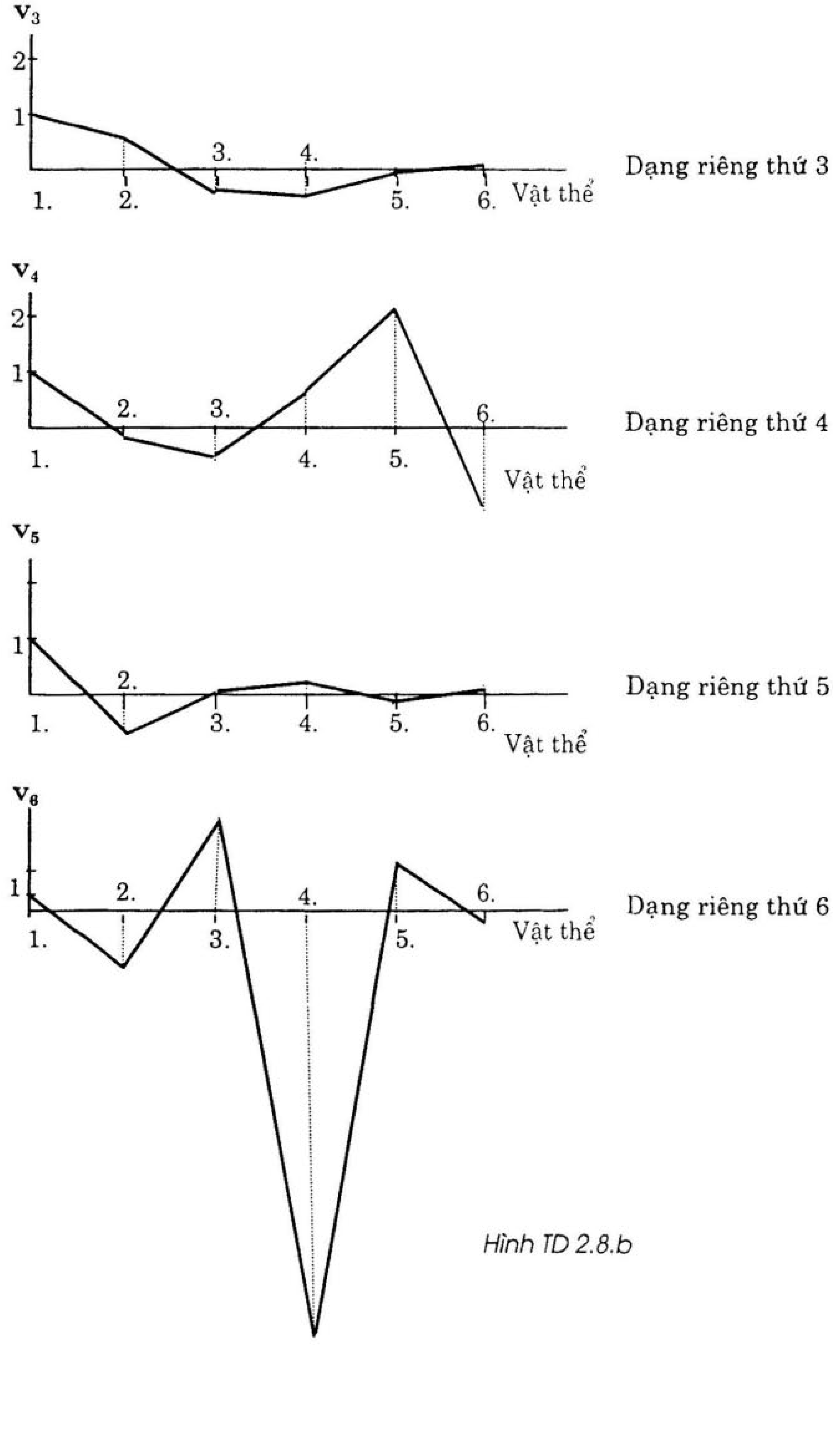
Ma trận dạng riêng:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 & 1,0000 \\ 1,4835 & 1,3068 & 0,5564 & -0,1127 & -0,5591 & -1,8332 \\ 1,6946 & 1,1445 & -0,3216 & -0,4419 & 0,1004 & 4,3883 \\ 1,7887 & 0,6678 & -0,4012 & 0,5263 & 0,1955 & -15,8426 \\ 2,0266 & -0,9560 & -0,0720 & 2,1577 & -0,1231 & 2,6749 \\ 2,0816 & -1,3839 & 0,1412 & -1,3654 & 0,0536 & -0,6173 \end{bmatrix}.$$

Các dạng riêng được biểu diễn trên hình TD 2.8.b:



Hình TD 2.8.b

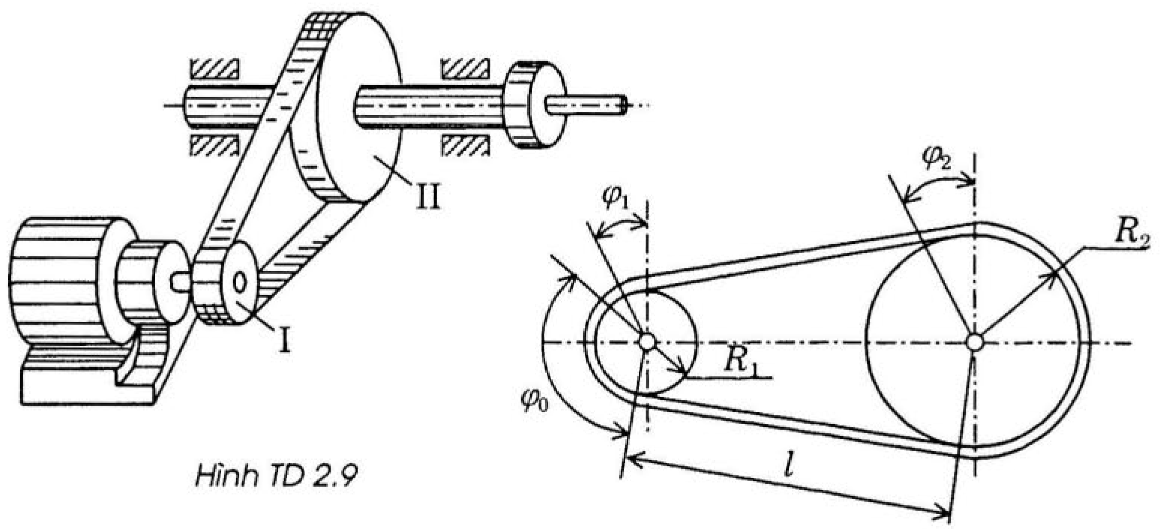

v_3
Dạng riêng thứ 3
v_4
Dạng riêng thứ 4
v_5
Dạng riêng thứ 5
v_6
Dạng riêng thứ 6
Vật thể
1. 2. 3. 4. 5. 6.
1 2

Hình TD 2.8.b

Thí dụ 2.9 Trên hình TD 2.9 biểu diễn lược đồ cơ cấu truyền động dây đai của máy tiện. Ở chế độ bình ổn mômen quay của động cơ cân bằng với mômen của lực cắt gọt (bỏ qua lực cản), ứng suất tương ứng của các nhánh dây là σ_{10} và σ_{20}. Cho R_1 = 100 mm, R_2 = 200 mm, mômen quán tính của bánh đai dẫn động I và rôto của động cơ điện là J_1 = 0,08 kgm^2, của bánh đai bị dẫn II và trục máy J_2 = 0,1 kgm^2, l = 0,6 m, diện tích thiết diện ngang của dây đai là F = 2 cm^2, môđun đàn hồi của dây đai là E = 100 MPa, góc trượt đàn hồi của dây đai là φ_0 = 150^0, hệ số ma sát của dây đai và bánh đai là μ_0 = 0,3. Thành lập phương trình vi phân dao động bé của dao động xoắn của các bánh đai I và II, sau đó xác định các tần số riêng của hệ.

Lời giải. Độ dãn dài của nhánh dây đai trên và dưới khi các bánh đai I và II có góc quay φ_1, φ_2 (so với chuyển động bình ổn) là:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= R_1\varphi_1 - R_2\varphi_2 , \\ \Delta l_2 &= -R_1\varphi_1 + R_2\varphi_2 . \end{aligned} \tag{1}$$



Hình TD 2.9

Mặt khác độ dãn dài của các nhánh dây đai sinh ra do có ứng suất bổ sung khi có dao động quay khi có dao động quay của các bánh đai, được tính theo công thức:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \Delta\sigma_1\left[\frac{l}{E} + \frac{R_2}{\mu_0 E}\left(1 - e^{-\mu_0\varphi_0}\right)\right] = a_1\Delta\sigma_1 , \\ \Delta l_2 &= \Delta\sigma_2\left[\frac{l}{E} + \frac{R_1}{\mu_0 E}\left(e^{\mu_0\varphi_0} - 1\right)\right] = a_2\Delta\sigma_2 . \end{aligned} \tag{2}$$

Phương trình vi phân dao động của cơ hệ có dạng:

$$\begin{cases} J_1\ddot{\varphi}_1 + R_1F\left(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_2\right) = 0, \\ J_2\ddot{\varphi}_2 + R_2F\left(\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1\right) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Sử dụng (1), (2), biến đổi (3) về dạng:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \dfrac{R_1^2Fa_3}{J_1}\varphi_1 - \dfrac{R_1R_2Fa_3}{J_1}\varphi_2 = 0\ , \\ \ddot{\varphi}_2 - \dfrac{R_1R_2Fa_3}{J_2}\varphi_1 + \dfrac{R_2^2Fa_3}{J_2}\varphi_2 = 0\ , \end{cases} \tag{4}$$

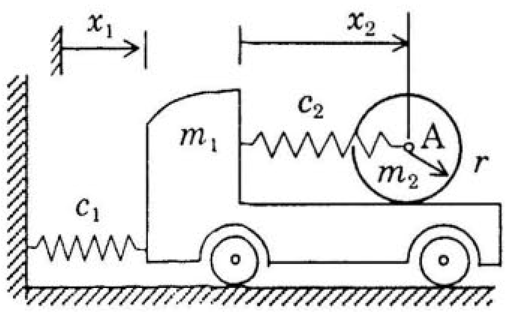
trong đó $a_3 = (a_1 + a_2)/a_1a_2$.

Các tần số riêng:

$$\omega_1 = 0,\ \omega_2 = \sqrt{Fa_3\left(\frac{R_1}{J_1} + \frac{R_2}{J_2}\right)} = 109,925\ \ 1/s.$$

Thí dụ 2.10 Xe ôtô chở khối trụ. Coi xe là vật tịnh tiến, khối trụ lăn không trượt trên sàn xe. Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ và đưa về dạng toạ độ chính. Cho $m_1 = m_2 = m$, $c_1 = c_2 = c$.

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), trong đó x_1 là dịch chuyển của khối tâm ôtô, x_2 là độ dài hiện thời của là xo c_2. Chọn gốc ở vị trí cân bằng (tại đó $x_1 = 0$, $x_2 = L$). L là độ dài tự nhiên của lò xo c_2 .



Hình TD 2.10

Biểu thức động năng và thế năng cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}J_A\frac{\dot{x}_2^2}{r^2}$$
$$= m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}m\dot{x}_2^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(x_2 - L\right)^2.$$

Phương trình vi phân dao động của cơ hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + cx_1 = 0, \\ m\ddot{x}_1 + \dfrac{3}{2}m\ddot{x}_2 + cx_2 = cL. \end{cases}$$

Đặt $q_1 = x_1, q_2 = x_2 - L$, nhận được phương trình vi phân:

$$\begin{cases} 2m\ddot{q}_1 + m\ddot{q}_2 + cq_1 = 0, \\ m\ddot{q}_1 + \dfrac{3}{2}m\ddot{q}_2 + cq_2 = 0. \end{cases} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & m \\ m & 1,5m \end{bmatrix}, \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Phương trình tần số: $\left|\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}\right| = 0$, hay $4\lambda^2 - 7\lambda + 2 = 0$, với $\lambda = \dfrac{m}{c}\omega^2$.

Giải ra thu được:

$$\lambda_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{8} \Rightarrow \omega_1 = 0,6\sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$\lambda_2 = \frac{7 + \sqrt{17}}{8} \Rightarrow \omega_2 = 1,18\sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Ma trận dạng riêng của cơ hệ

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,78 & -1,28 \end{bmatrix}.$$

Tính toán nhận được:

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4,476m & 0 \\ 0 & 1,9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1,6c & 0 \\ 0 & 2,64c \end{bmatrix}.$$

Phương trình vi phân của hệ ở dạng toạ độ chính:

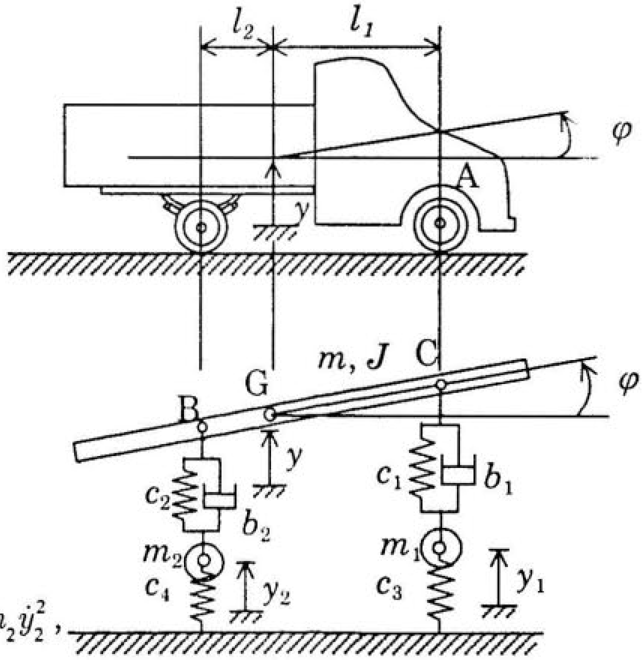
$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + 0,36\dfrac{c}{m}p_1 = 0, \\ \ddot{p}_2 + 1,4\dfrac{c}{m}p_2 = 0. \end{cases}$$

Thí dụ 2.11 Mô hình ôtô là hệ dao động bốn bậc tự do biểu diễn trên hình vẽ. Thùng xe và khung có khối lượng m, mômen quán tính đối với trục nằm ngang đi qua trọng tâm G là J. Khối lượng các cầu trước và cầu sau (kể cả các bánh xe) là m_1 và m_2. Độ cứng của hệ thống lo xo ở giá đỡ trước và sau là c_1, c_2, độ cứng của các lốp xe trước và sau là c_3 và c_4. Hệ số cản nhớt của các giảm chấn ở giá đỡ trước và sau là b_1, b_2.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động bé của cơ hệ trong mặt phẳng thẳng đứng.

b) Cho $J = 200$ kgm^2, $l_1 = 3$ m, $l_2 = 1$ m, $m = 200$ kg, $m_1 = m_2 = 30$ kg, $c_1 = c_2 = 4.10^5$ N/m, $b_1 = b_2 = 0$, $c_3 = c_4 = 10^5$ N/m. Tính các tần số dao động riêng và dạng riêng.

c) Xét sự trực giao của các dạng riêng với ma trận khối lượng và ma trận độ cứng.



Hình TD 2.11

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (y, φ, y_1, y_2) trong đó y là dịch chuyển thẳng đứng của trọng tâm G, φ là góc quay của thùng xe so với phương ngang; y_1, y_2 là dịch chuyển thẳng đứng của trọng tâm cầu trước và cầu sau. Các đại lượng được tính so với vị trí cân bằng tĩnh.

Biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_3y_1^2 + \frac{1}{2}c_4y_2^2 + \frac{1}{2}c_1(y + l_1\varphi - y_1)^2 + \frac{1}{2}c_2(y - l_2\varphi - y_2)^2.$$

$$\Phi = \frac{1}{2}b_1(\dot{y} + l_1\dot{\varphi} - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2}b_2(\dot{y} - l_2\dot{\varphi} - \dot{y}_2)^2.$$

Lưu ý: Các dịch chuyển thẳng đứng được tính so với vị trí cân bằng tĩnh nên bỏ qua các trọng lực trong các biểu thức thế năng của cơ hệ.

Phương trình dao động bé của cơ hệ xung quanh vị trí cân bằng

$$\mathbf{M\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0},$$

với $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & b_1 l_1 - b_2 l_2 & -b_1 & -b_2 \\ b_1 l_1 - b_2 l_2 & b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2 & -b_1 l_1 & b_2 l_2 \\ -b_1 & -b_1 l_1 & b_1 & 0 \\ -b_2 & b_2 l_2 & 0 & b_2 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 l_1 - c_2 l_2 & -c_1 & -c_2 \\ l_1 c_1 - l_2 c_2 & c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 & -c_1 l_1 & c_2 l_2 \\ -c_1 & -c_1 l_1 & c_1 + c_3 & 0 \\ -c_2 & c_2 l_2 & 0 & c_2 + c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} y \\ \varphi \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Thay các giá trị đã cho, phương trình tần số là

$$\omega^8 - 57333,3\omega^6 + 0,822.10^9\omega^4 - 0,176.10^{13}\omega^2 + 0,7.10^{15} = 0.$$

Sử dụng Maple, tính được:

$$\omega_1 = 23,04 \text{ s}^{-1}, \omega_2 = 44,25 \text{ s}^{-1}, \omega_3 = 138,5 \text{ s}^{-1}, \omega_4 = 188,82 \text{ s}^{-1}.$$

Tính toán vectơ riêng, có ma trận dạng riêng

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,98 & -0,34 & -0,15 & 0,44 \\ -0,23 & -1,44 & 0,036 & 1,86 \\ 0,24 & -4,24 & 0,24 & -4,24 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

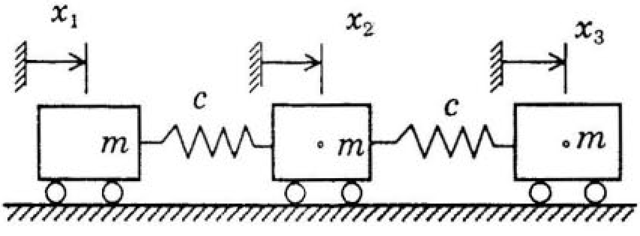
$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 234,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1003,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1303,7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 124210 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1965000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 702830 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 46479000 \end{bmatrix}.$$

Như vậy các dạng riêng trực giao với **M** và **C**.

Thí dụ 2.12 Ba toa tầu như nhau khối lượng m được nối ghép với nhau. Độ cứng của các khớp nối đều là c. Khi nối ghép, toa tàu bên trái có vận tốc v_0, hai toa còn lại đứng yên. Xác định quy luật chuyển động của cơ hệ sau khi nối ghép.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.



Hình TD 2.12

Chọn toạ độ suy rộng là (x_1, x_2, x_3), trong đó x_k là dịch chuyển của trọng tâm toa tầu thứ k so với vị trí cân bằng tĩnh. Biểu thức động năng và thế năng của cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}c(x_3 - x_2)^2.$$

Phương trình vi phân dao động của cơ hệ $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = 0$, trong đó

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Điều kiện đầu của hệ là $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

b) Tần số riêng, dạng riêng

Phương trình tần số $|\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}| = 0$ có dạng

$$\begin{bmatrix} c - m\omega^2 & -c & 0 \\ -c & 2c - m\omega^2 & -c \\ 0 & -c & c - m\omega^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Đặt $\lambda = \dfrac{m}{c}\omega^2$ phương trình tần số có nghiệm là $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

Tương ứng $\omega_1 = 0$, dạng riêng $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$,

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, dạng riêng $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$,

$\omega_3 = \sqrt{\dfrac{3c}{m}}$, dạng riêng $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Ma trận dạng riêng:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân dao động cơ hệ là:

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1\left(A_1 + A_2 t\right) + \mathbf{v}_2\left(B_1 \cos\sqrt{\frac{c}{m}}t + B_2 \sin\sqrt{\frac{c}{m}}t\right)$$
$$+\mathbf{v}_3\left(C_1 \cos\sqrt{\frac{3c}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t\right).$$

Sử dụng các điều kiện đầu dẫn đến:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 + C_1 = 0, \\ A_1 - 2C_1 = 0, \\ A_1 - B_1 + C_1 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 + \sqrt{\dfrac{c}{m}}B_2 + \sqrt{\dfrac{3c}{m}}C_2 = v_0, \\ A_2 - 2\sqrt{\dfrac{3c}{m}}C_2 = 0, \\ A_2 - \sqrt{\dfrac{c}{m}}B_2 + \sqrt{\dfrac{3c}{m}}C_2 = 0. \end{cases}$$

Giải ra được: $A_1 = B_1 = C_1 = 0, A_2 = \dfrac{v_0}{3}, B_2 = \dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{c}}, C_2 = \dfrac{v_0}{6}\sqrt{\dfrac{m}{3c}}$.

Phương trình chuyển động của cơ hệ là:

$$x_1 = \frac{v_0}{3}t + \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{v_0}{6}\sqrt{\frac{m}{3c}}\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t,$$

$$x_2 = \frac{v_0}{3}t - \frac{v_0}{3}\sqrt{\frac{m}{3c}}\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t,$$

$$x_3 = \frac{v_0}{3}t - \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{c}}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{v_0}{6}\sqrt{\frac{m}{3c}}\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t.$$

Nhận xét rằng các toa xe dao động xung quanh trạng thái chuyển động đều với vận tốc $v_0/3$.

Thí dụ 2.13 Cho cơ hệ là hai con lắc vật lý nối với nhau bằng lò xo như ở thí dụ 2.2. Tìm điều kiện xuất hiện hiện tượng phách.

Lời giải. Phương trình vi phân dao động của cơ hệ dưới dạng toạ độ suy rộng (θ_1, θ_2) là

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_1 + (mg\dfrac{L}{2} + ca^2)\theta_1 - ca^2\theta_2 = 0, \\ \dfrac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}_2 - ca^2\theta_2 + \left(mg\dfrac{L}{2} + ca^2\right)\theta_2 = 0. \end{cases}$$

Tần số riêng của cơ hệ là nghiệm của phương trình tần số

$$\left|\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}\right| = \begin{vmatrix} mg\dfrac{L}{2} + ca^2 - \dfrac{mL^2}{3}\omega^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & mg\dfrac{L}{2} + ca^2 - \dfrac{mL^2}{3}\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

Tính toán chúng ta có $\omega_1^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L}, \omega_2^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{L} + \dfrac{6ca^2}{mL^2}$.

Hiện tượng phách xuất hiện khi $\omega_1 \approx \omega_2$ tức là $\omega_2 - \omega_1 << \omega_1$. Hay

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 << \omega_1^2 \text{ tức là } \frac{4ca^2}{mL} << g.$$

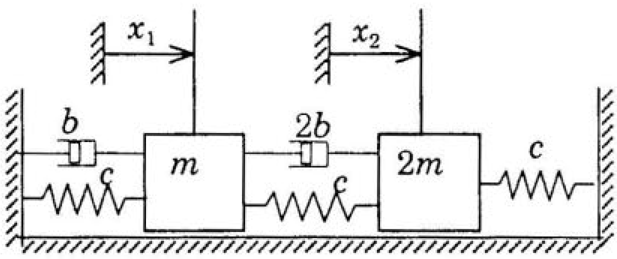
2.3 Dao động tự do có cản

2.3.1 *Phương pháp ma trận dạng riêng*

Thí dụ 2.14 Mô hình dao động cơ hệ hai bậc tự do gồm hai khối lượng trượt không ma sát trên nền ngang. Hãy tìm quy luật chuyển động của cơ hệ. Cho $m = 1$ kg, $c = 100$N/m, $b = 2$ Ns/m.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_k là dịch chuyển của khối tâm vật k so với vị trí cân bằng tĩnh. Biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của cơ hệ là:



Hình TD 2.14

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}b\dot{x}_1^2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2.$$

Phương trình dao động của hệ là

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3b\dot{x}_1 - 2b\dot{x}_2 + 2cx_1 - cx_2 = 0, \\ 2m\ddot{x}_2 - 2b\dot{x}_1 + 2b\dot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3b & -2b \\ -2b & 2b \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}.$$

Ta có $\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \delta\mathbf{C}$ với $\alpha = -\frac{b}{m}, \delta = \frac{2b}{c}$, do vậy có thể sử dụng phương pháp ma trận dạng riêng để xác định dao động tự do có cản.

b) Tần số riêng, dạng riêng

Phương trình tần số $\left|\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}\right| = 0$ có dạng:

$$\begin{vmatrix} 2c - \omega^2 m & -c \\ -c & 2c - 2\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 .$$

Đặt $\lambda = \dfrac{\omega^2 m}{c}$ nhận được phương trình đối với λ là:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 1,5 = 0 .$$

Giải ra được:

$$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \omega_1 = 0,7962\sqrt{\frac{c}{m}}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1,366 \end{bmatrix}^T ,$$

$$\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \omega_2 = 1,5382\sqrt{\frac{c}{m}}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0,366 \end{bmatrix}^T .$$

Ma trận dạng riêng:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,366 & -0,366 \end{bmatrix}$$

c) Phương trình vi phân dao động ở các toạ độ chính.

Đặt $\mathbf{x} = \mathbf{V}.\mathbf{p}$,

$$\mathbf{V}^T\mathbf{M}\mathbf{V} = m\begin{bmatrix} 4,732 & 0 \\ 0 & 1,268 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{B}\mathbf{V} = b\begin{bmatrix} 1,268 & 0 \\ 0 & 4,732 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{C}\mathbf{V} = c\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Phương trình vi phân ở toạ độ chính là:

$$\begin{cases} 4,732m\ddot{p}_1 + 1,268b\dot{p}_1 + 3cp_1 = 0, \\ 1,268m\ddot{p}_2 + 4,732b\dot{p}_2 + 3cp_2 = 0. \end{cases}$$

Đưa về dạng đơn giản hơn:

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + 2D_1\omega_1\dot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 0, \\ \ddot{p}_2 + 2D_2\omega_2\dot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = 0. \end{cases}$$

trong đó các độ cản Lehr là: $D_1 = 0,268\dfrac{b}{2m\omega_1}$, $D_2 = 3,732\dfrac{b}{2m\omega_2}$.

Điều kiện để p_1, p_2 thực hiện dao động tắt dần là $D_1 < 1$ và $D_2 < 1$, tức là $b < 2\times 0{,}412\sqrt{mc}$. Đối với số liệu đã cho thì điều kiện này thoả mãn.

Biểu thức nghiệm ở dạng toạ độ chính:

$$\begin{cases} p_1(t) = e^{-D_1\omega_1 t}(c_{11}\cos\omega_1^* t + c_{12}\sin\omega_1^* t), \\ p_2(t) = e^{-D_2\omega_2 t}(c_{21}\cos\omega_2^* t + c_{22}\sin\omega_2^* t). \end{cases}$$

trong đó: $\omega_1^* = \sqrt{\omega_1^2 - D_1^2}$, $\omega_2^* = \sqrt{\omega_2^2 - D_2^2}$.

Quy luật dao động của hệ là $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 p_1 + \mathbf{v}_2 p_2$

$$\begin{cases} x_1 = e^{-D_1\omega_1 t}(c_{11}\cos\omega_1^* t + c_{12}\sin\omega_1^* t) + e^{-D_2\omega_2 t}(c_{21}\cos\omega_2^* t + c_{22}\sin\omega_2^* t), \\ x_2 = 1{,}366.e^{-D_1\omega_1 t}(c_{11}\cos\omega_1^* t + c_{12}\sin\omega_1^* t) - 0{,}366.e^{-D_2\omega_2 t}(c_{21}\cos\omega_2^* t + c_{22}\sin\omega_2^* t). \end{cases}$$

trong đó c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} là các hằng số xác định từ điều kiện đầu. Với số liệu đã cho tính được

$$\omega_1 = 7{,}962 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 15{,}382 \text{ s}^{-1},$$

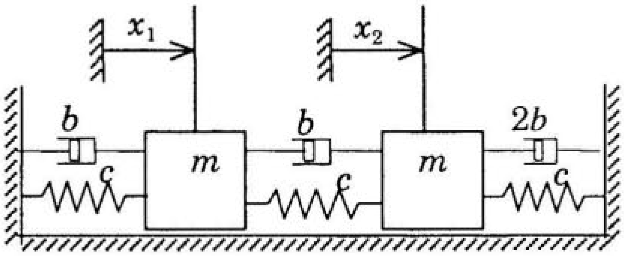
$$D_1\omega_1 = 0{,}268, \quad D_2\omega_2 = 3{,}732, \quad \omega_1^* = 7{,}958, \quad \omega_2^* = 14{,}922.$$

2.3.2 Phương pháp trực tiếp

Thí dụ 2.15 Xác định quy luật dao động của cơ hệ gồm hai khối lượng chuyển động không ma sát trên nền ngang như hình TD2.15. Cho $m = 1$ kg, $c = 100$ N/m, $b = 2$ Ns/m.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động

Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_k là dịch chuyển của khối tâm vật k so với vị trí cân bằng tĩnh. Biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của cơ hệ là:



Hình TD 2.15

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}cx_2^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}b\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + b\dot{x}_2^2 .$$

Phương trình dao động của hệ là:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2b\dot{x}_1 - b\dot{x}_2 + 2cx_1 - cx_2 = 0, \\ 2m\ddot{x}_2 - b\dot{x}_1 + 3b\dot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2b & -b \\ -b & 3b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}.$$

Trường hợp này lực cản không có dạng Rayleigh. Sử dụng phương pháp trực tiếp để tìm dao động của hệ.

b) Nếu tìm nghiệm của phương trình vi phân dao động dưới dạng $\mathbf{x} = \mathbf{z}e^{\lambda t}$ với $\mathbf{x} = [\, x_1 \;\; x_2 \,]^{\mathrm{T}}$ đưa đến phương trình đặc trưng xác định λ:

$$\left|\mathbf{C} + \lambda\mathbf{B} + \lambda^2\mathbf{M}\right| = 0 .$$

Rút gọn : $\lambda^4 + 10\lambda^3 + 420\lambda^2 + 1600\lambda + 30000 = 0$.

Áp dụng hệ chương trình Maple, tính được các giá trị riêng:

$$\lambda_1 = -1,5025 \pm 9,9124.i, \lambda_2 = -3,497 \pm 16,918.i,$$

và các vectơ riêng $\mathbf{z}_1 = \mathbf{u}_1 \pm i.\mathbf{v}_1$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{u}_2 \pm i.\mathbf{v}_2$,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -0,96007 & 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,1683 & 0 \end{bmatrix}^T,$$
$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1,00007 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0,1017 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Nghiệm tổng quát:

$\mathbf{x} =$

$$e^{-1,5025t}\left[\mathrm{A}_1\left(\mathbf{u}_1\cos 9,9124t - \mathbf{v}_1 \sin 9,9124t\right) + B_1\left(\mathbf{u}_1 \sin 9,9124t + \mathbf{v}_1 \cos 9,9124t\right)\right]$$
$$\mathrm{e}^{-3,497t}\left[\mathrm{A}_2\left(\mathbf{u}_2\cos 16,918t - \mathbf{v}_2 \sin 16,918t\right) + B_2\left(\mathbf{u}_2\cos 16,918t + \mathbf{v}_2 \sin 16,918t\right)\right].$$

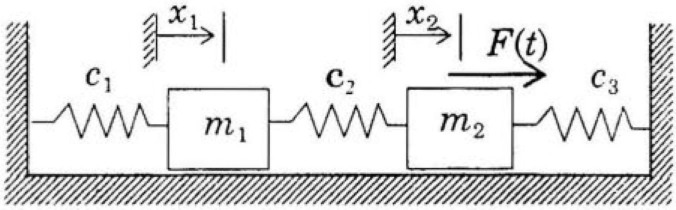
A_1, B_1, A_2, B_2 là các hằng số được xác định từ điều kiện đầu.

2.4 Dao động cưỡng bức

Thí dụ 2.16 Cơ hệ có hai khối lượng trượt không ma sát trên nền ngang như hình TD 2.16a. Tại vị trí cân bằng tĩnh, các lò xo không biến dạng.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

b) Cho $c_1 = c_2 = 1000$ N/cm, $c_3 = 0$, $m_1 = m_2 = 2\ kg$. Tính các tần số riêng ω_1, ω_2 của cơ hệ.



Hình TD 2.16a

c) Với số liệu ở phần b) và cho $F(t) = F_0 \sin\Omega t$, chứng minh rằng khi $\Omega = \omega_1$ hoặc $\Omega = \omega_2$ thì biên độ dao động cưỡng bức tăng lên vô cùng.

d) Vẽ đồ thị dao động cưỡng bức với số liệu ở phần b) và $F_0 = 400$ N.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động.

Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_1, x_2 là dịch chuyển ngang của các khối lượng m_1, m_2 so với vị trí cân bằng tĩnh.

Động năng và thế năng cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 x_2^2.$$

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_2 x_2 = 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 x_1 + (c_2 + c_3) x_2 = F(t). \end{cases}$$

b) Tần số riêng, dạng riêng.

Phương trình tần số có dạng $\left|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}\right| = m_1 m_2 \left(\gamma_1^2 - \omega^2\right)\left(\gamma_2^2 - \omega^2\right) - c_2^2 = 0$,

trong đó $\gamma_1^2 = \dfrac{c_1 + c_2}{m_1}, \gamma_2^2 = \dfrac{c_2 + c_3}{m_2}$. Phân tích tam thức bậc hai ra thừa số ta có $\left|C - \omega^2 M\right| = m_1 m_2 \left(\omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2\right) = 0$, trong đó ω_1, ω_2 là các tần số riêng của hệ. Với các số liệu đã cho, tính được $\omega_1 = 138,2\ rad/s$, $\omega_2 = 361,8\ rad/s$, ma trận dạng riêng $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.618 & -0,618 \end{bmatrix}$.

c) Tính toán dao động cưỡng bức.

Vì $F(t) = F_0 \sin\Omega t$, ta tìm nghiệm của phương trình dưới dạng:

$$x_1 = A_1 \sin \Omega t,\ x_2 = A_2 \sin \Omega t.$$

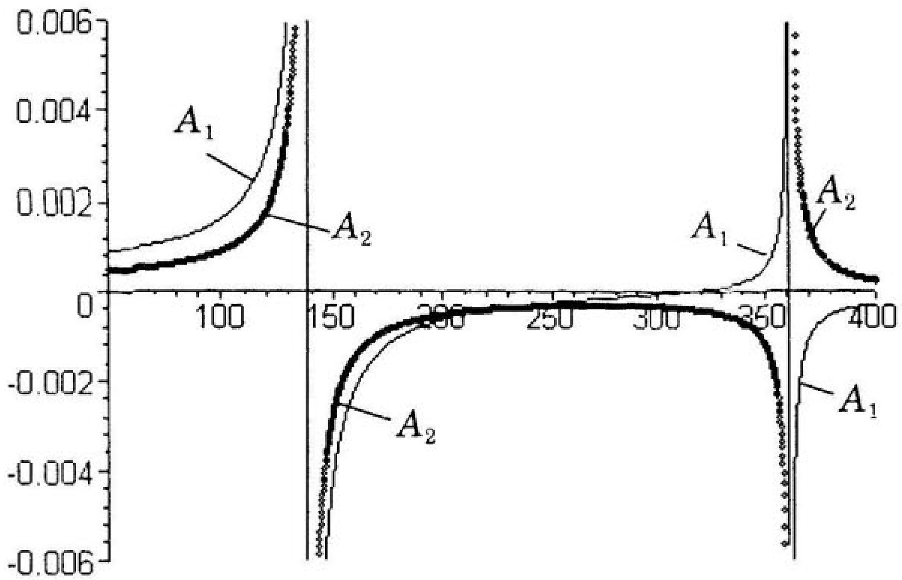
Thế vào phương trình vi phân dao động của hệ, ta tìm được:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

trong đó: $\Delta = m_1 m_2 \left(\Omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\Omega^2 - \omega_2^2\right)$, $\Delta_1 = f_0 c_2$, $\Delta_2 = m_1 f_0 \left(\gamma_1^2 - \Omega^2\right)$.

Như vậy khi $\Omega = \omega_1$ hoặc $\Omega = \omega_2$ thì biên độ dao động cưỡng bức A_1, A_2 tăng lên vô cùng.

d) Với $F_0 = 400$ N , chúng ta vẽ đồ thị biên độ dao động cưỡng bức A_1, A_2 như hình TD 2.16b.

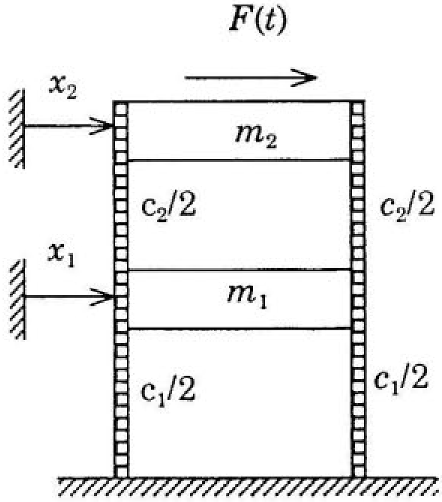


Hình TD 2.16b

Thí dụ 2.17 Toà nhà hai tầng có mô hình là hai khối lượng $m_1 = 2m_2 = 2m$ thực hiện dao động ngang. Các bức tường có độ cứng uốn là $c_1 = 2c_2 = 2c$, khối lượng bỏ qua. Xem rằng lực của gió đặt vào m_2 là $F(t) = F_0\sin\Omega t$. Xác định quy luật dao động của cơ hệ.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động.

Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), với x_1, x_2 là dịch chuyển ngang của các khối lượng m_1, m_2 so với vị trí cân bằng thẳng đứng.



Hình TD 2.17

Động năng và thế năng cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}2m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2}2cx_1^2 + \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2.$$

Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 3cx_1 - cx_2 = 0, \\ m\ddot{x}_2 - cx_1 + cx = F_0\sin\Omega t. \end{cases}$$

b) Tần số riêng, dạng riêng

Phương trình tần số $|\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M}| = 0$ có dạng:

$$\begin{vmatrix} 3c - 2m\omega^2 & -c \\ -c & c - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Đặt $\lambda = \omega^2\dfrac{m}{c}$, nhận được phương trình:

$$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0,$$

Giải được các nghiệm là $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 2{,}0$.

Tương ứng tính được:

$$\omega_1^2 = 0{,}5\frac{c}{m}, \quad \mathbf{v}_1 = [0{,}5 \quad 1]^T; \quad \omega_2^2 = 2\frac{c}{m}, \quad \mathbf{v}_2 = [-1 \quad 1]^T.$$

Ma trận dạng riêng:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Phương trình vi phân ở dạng toạ độ chính:

Đổi biến $\mathbf{x} = \mathbf{Vp}$, ta có

$$\mathbf{V}^T\mathbf{MV} = m\begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 3,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{CV} = c\begin{bmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 6,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}^T\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} F_0 \sin\Omega t.$$

Phương trình vi phân ở dạng toạ độ chính:

$$\begin{cases} 1,5m\ddot{p}_1 + 0,75.c.p_1 = F_0 \sin\Omega t, \\ 3m\ddot{p}_2 + 6.c.p_2 = F_0 \sin\Omega t. \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = \dfrac{2F_0}{3m} \sin\Omega t, \\ \ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = \dfrac{F_0}{3m} \sin\Omega t. \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} p_1(t) = c_{11} \cos\omega_1 t + c_{12} \sin\omega_1 t + \dfrac{2F_0}{3m} . \dfrac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} \sin\Omega t, \\ p_2(t) = c_{21} \cos\omega_2 t + c_{22} \sin\omega_2 t + \dfrac{F_0}{3m} . \dfrac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \sin\Omega t. \end{cases}$$

Trở về toạ độ suy rộng ban đầu, dao động của hệ là:

$$\begin{aligned} x_1 = {} & 0,5(c_{11} \cos\omega_1 t + c_{12} \sin\omega_1 t) + \frac{F_0}{3m} \cdot \frac{\sin\Omega t}{\omega_1^2 - \Omega^2} \\ & -(c_{21} \cos\omega_2 t + c_{22} \sin\omega_2 t) - \frac{F_0}{3m} \cdot \frac{\sin\Omega t}{\omega_2^2 - \Omega^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 = {} & (c_{11} \cos\omega_1 t + c_{12} \sin\omega_1 t) + \frac{2F_0}{3m} \cdot \frac{\sin\Omega t}{\omega_1^2 - \Omega^2} \\ & +(c_{21} \cos\omega_2 t + c_{22} \sin\omega_2 t) + \frac{F_0}{3m} \cdot \frac{\sin\Omega t}{\omega_2^2 - \Omega^2} \end{aligned}$$

Thí dụ 2.18 Mô hình của một rơmoóc chuyển động trên đường gồ ghề mô tả trên hình TD 2.18. Khối lượng của rơmoóc là m, của bánh xe là m_1. Mômen quán tính của rơmoóc đối với trục nằm ngang đi qua O bằng J_0, độ cứng của lò xo bằng c, của lốp xe bằng c_1, vận tốc kéo không đổi và bằng v_0. Giả thiết rằng điểm nối giữa rơmoóc và ôtô (điểm O) chỉ có dịch chuyển ngang với vận tốc v_0, phương trình của dạng mặt đường là $h = h_0(1 - \cos\frac{2x\pi}{L})$, $x = v_0 t$. Xem rằng ma sát nhớt giữa thùng và bánh xe có hệ số b.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ;

b) Khi $b = 0$, hãy tính tần số riêng và giá trị tới hạn của vận tốc v_0.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động.

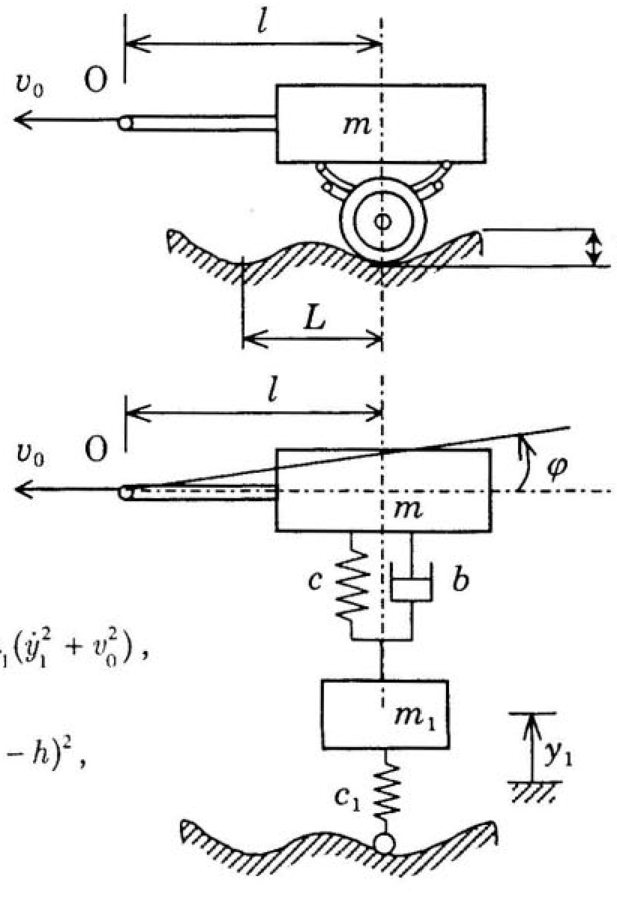
Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (y_1, φ), trong đó y_1 là dịch chuyển của khối tâm bánh xe, φ là góc xoay của thùng xe so với trạng thái bình ổn (xe chạy đều trên nền ngang phẳng).

Biểu thức của động năng, thế năng và hàm hao tán của cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{y}_1^2 + v_0^2),$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c(l\varphi - y_1)^2 + \frac{1}{2}c_1(y_1 - h)^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2}b(l\dot{\varphi} - \dot{y}_1)^2.$$



Hình TD 2.18

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2, nhận được phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\begin{cases} J_0\ddot{\varphi} + bl^2\dot{\varphi} - bl\dot{y}_1 + cl^2\varphi - cly_1 = 0, \\ m_1\ddot{y}_1 - bl\dot{\varphi} + b\dot{y}_1 - cl\varphi + (c + c_1)y_1 = c_1h_0(1 - \cos\dfrac{2\pi v_0}{L}t). \end{cases}$$

Rút gọn nhận được phương trình:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} - 2\dfrac{\delta}{l}\dot{y}_1 + p_0^2\varphi - \dfrac{p_0^2}{l}y_1 = 0, \\ \ddot{y}_1 - 2\delta_1 l\dot{\varphi} + 2\delta_1\dot{y}_1 - p_{10}^2 l\varphi + (p_{10}^2 + p_{20}^2)y_1 = p_{20}^2 h_0(1 - \cos\dfrac{2\pi v_0}{L}t), \end{cases}$$

trong đó $2\delta = \dfrac{bl^2}{J_0}, p_0^2 = \dfrac{cl^2}{J_0}, 2\delta_1 = \dfrac{b}{m_1}, p_{10}^2 = \dfrac{c}{m_1}, p_{20}^2 = \dfrac{c}{m_1}$.

b) Trường hợp không cản ($b = 0$), phương trình đặc trưng $\left|\mathrm{C} - \omega^2\mathrm{M}\right| = 0$ có dạng

$$\omega^4 - (p_0^2 + p_{10}^2 + p_{20}^2)\omega^2 + p_0^2p_{20}^2 = 0.$$

Các tần số dao động riêng:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{p_0^2 + p_{10}^2 + p_{20}^2}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p_0^2 + p_{10}^2 + p_{20}^2}{2}\right)^2 - p_0^2p_{20}^2}}.$$

Trường hợp cộng hưởng xảy ra nếu $\dfrac{2\pi v_0}{L} = \omega_1$ hoặc $\dfrac{2\pi v_0}{L} = \omega_2$.

Do đó các vận tốc giới hạn là $v_{01} = \dfrac{L\omega_1}{2\pi}$ và $v_{02} = \dfrac{L\omega_2}{2\pi}$.

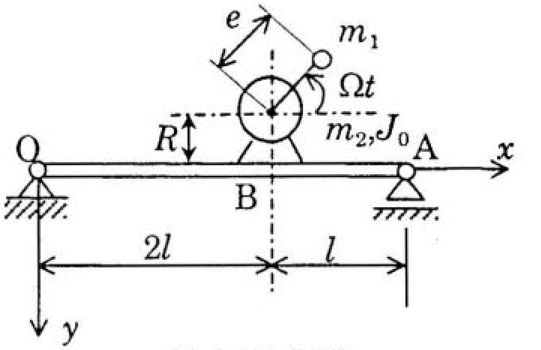
Thí dụ 2.19 Động cơ điện có khối lượng m gắn trên dầm có độ dài $3l$. Rôto lệch tâm gây ra lực quán tính ly tâm $F_0 = m_1\Omega^2 e$. Bỏ qua khối lượng dầm, cho độ cứng uốn của dầm là EI, khoảng cách từ khối tâm động cơ đến dầm là $R = l/4$, mômen quán tính của rôto đối với trục quay là $J_0 = ml^2/4$, $\Omega = 2\sqrt{EI/ml^3} = const$. Tính tần số riêng và biên độ cưỡng bức của hệ.

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân chuyển động

Động cơ chuyển động song phẳng nhưng dịch chuyển ngang có thể bỏ qua, do đó chọn toạ độ suy rộng của hệ là (y, φ), trong đó y là độ võng của dầm ở vị trí B, φ là góc xoay của dầm tại đó (tính so với vị trí cân bằng tĩnh).

Sử dụng phương pháp lực, có liên hệ

$$\begin{cases} y = f_y d_{11} + M_z d_{12}, \\ \varphi = f_y d_{21} + M_z d_{22}, \end{cases}$$



Hình TD 2.19

trong đó:

$$f_y = F_y - m\ddot{y},$$

$$M_z = F_x R - J\ddot{\varphi},$$

($F_y = F_0 \sin\Omega t$, $F_x = F_0\cos\Omega t$ là hình chiếu lực quán tính ly tâm lên phương y và phương x, $J = J_0 + mR^2$ là mômen quán tính của rôto đối với B (ở đây chọn chiều dương của mômen theo chiều kim đồng hồ).

Các hệ số ảnh hưởng có trị số $d_{11} = \dfrac{4l^3}{9EI}$, $d_{12} = d_{21} = \dfrac{2l^2}{9EI}$, $d_{22} = \dfrac{l}{3EI}$.

Chúng ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = (F_0 \sin\Omega t - m\ddot{y})d_{11} + (RF_0\cos\Omega t - J\ddot{\varphi})d_{12}, \\ \varphi = (F_0 \sin\Omega t - m\ddot{y})d_{21} + (RF_0\cos\Omega t - J\ddot{\varphi})d_{22}. \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} m\ddot{y}d_{11} + J\ddot{\varphi}d_{12} + y = F_0 d_{11}\sin\Omega t + RF_0 d_{12}\cos\Omega t, \\ m\ddot{y}d_{21} + J\ddot{\varphi}d_{22} + \varphi = F_0 d_{21}\sin\Omega t + RF_0 d_{22}\cos\Omega t. \end{cases} \quad (1)$$

b) Tần số riêng

Phương trình tần số $\left|\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}\right| = 0$, đặt $\lambda = \omega^2 \dfrac{ml^3}{EI}$, có dạng:

$$\left(1 - \frac{4}{9}\lambda\right)\left(1 - \frac{5}{48}\lambda\right) - \frac{10}{72}\lambda^2 = 0.$$

Tính toán ta có:

$$\lambda_1 = 2,062 \Rightarrow \omega_1 = 1,436\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}; \qquad \lambda_2 = 15,715 \Rightarrow \omega_2 = 3,96\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

c) Dao động cưỡng bức được tìm dưới dạng:

$$\begin{cases} y = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t, \\ \varphi = B_1 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t, \end{cases}$$

thay vào (1) được hệ phương trình xác định A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases} (1 - m\Omega^2 d_{11})A_1 - J\Omega^2 d_{12} B_1 = F_0 d_{11}, \\ (1 - J\Omega^2 d_{22})B_1 - m\Omega^2 d_{21} A_1 = F_0 d_{21}, \\ (1 - m\Omega^2 d_{11})A_2 - J\Omega^2 d_{12} B_2 = F_0 R d_{12}, \\ (1 - J\Omega^2 d_{22})B_2 - m\Omega^2 d_{21} A_2 = F_0 R d_{22}. \end{cases}$$

Giải ra nhận được:

$$A_1 = \frac{(1 - J\Omega^2 d_{22})d_{11} + J\Omega^2 d_{12}^2}{\Delta} F_0 = -\frac{104 F_0 l^3}{227 EI},$$

$$A_2 = \frac{(1 - m\Omega^2 d_{11})d_{12} + m\Omega^2 d_{12} d_{11}}{\Delta} F_0 R = -\frac{72 F_0 l^3}{227 EI},$$

$$B_1 = \frac{(1 - J\Omega^2 d_{22})d_{12} + J\Omega^2 d_{12} d_{22}}{\Delta} F_0 = -\frac{18 F_0 l^2}{227 EI},$$

$$B_2 = \frac{(1 - m\Omega^2 d_{11})d_{22} + m\Omega^2 d_{12}^2}{\Delta} F_0 R = \frac{5 F_0 l^2}{227 EI},$$

trong đó $\Delta = (1 - m\Omega^2 d_{11})(1 - J\Omega^2 d_{22}) - mJ\Omega^4 d_{12}^2$.

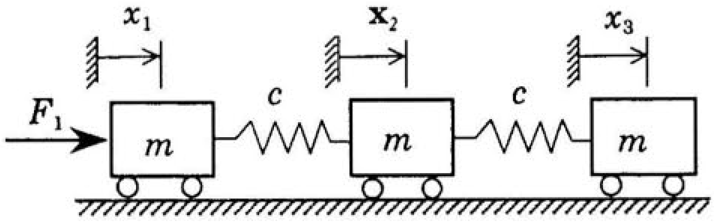
Do đó biên độ dao động cưỡng bức:

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \approx 0,465 \frac{F_0 l^3}{EI}, \qquad \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \approx 0,318 \frac{F_0 l^2}{EI}.$$

Thí dụ 2.20 Cơ hệ gồm 3 toa xe như nhau chuyển động trên đường nằm ngang. Bỏ qua lực cản. Độ cứng các khớp nối giữa các toa xe bằng nhau và bằng c. Toa xe bên trái chịu tác dụng của xung lực với cường độ I. Xác định chuyển động của cơ hệ theo thời gian. Xét trường hợp giữa các toa xe có lực cản nhớt với hệ số cản b.

Lời giải. Sử dụng kết quả ở thí dụ 2.12. Phương trình vi phân dao động cơ hệ:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I\delta(y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Hình TD 2.20

Các tần số riêng $\omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \omega_3 = \sqrt{3\frac{c}{m}}$.

Các dạng riêng chuẩn tương ứng:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \ \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T.$$

Ma trận dạng riêng chuẩn:

$$\mathbf{V}_n = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V}_n^T \mathrm{f} = \frac{1}{\sqrt{6m}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I\delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}\frac{I}{\sqrt{6m}}\delta(t).$$

Phương trình vi phân ở dạng toạ độ chuẩn:

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 = \dfrac{I}{\sqrt{3m}}\delta(t), \\ \ddot{p}_2 + \dfrac{c}{m}p_2 = \dfrac{I}{\sqrt{2m}}\delta(t), \\ \ddot{p}_3 + \dfrac{3c}{m}p_3 = -\dfrac{I}{\sqrt{6m}}\delta(t). \end{cases}$$

Điều kiện đầu $\dot{p}_i(0) = p_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Giải ra nhận được:

$$\begin{cases} p_1(t) = \dfrac{I}{\sqrt{3m}} \cdot t \cdot u(t), \\ p_2(t) = \dfrac{I}{\sqrt{2m}} \sin\sqrt{\dfrac{c}{m}}t \cdot u(t), \quad \text{trong đó } u(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad t \le 0, \\ 1 & khi \quad t > 0 \end{cases}. \\ p_3(t) = -\dfrac{I}{\sqrt{6m}} \sin\sqrt{\dfrac{3c}{m}}t \cdot u(t), \end{cases}$$

Trở lại toạ độ suy rộng (x_1, x_2, x_3):

$$x_1 = \left(\frac{I}{3m}t + \frac{I}{2m}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{I}{6m}\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t\right) \cdot u(t),$$

$$x_2 = \left(\frac{I}{3m}t - \frac{2I}{6m}\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t\right) \cdot u(t),$$

$$x_3 = \left(\frac{I}{3m}t - \frac{I}{2m}\sin\sqrt{\frac{c}{m}}t + \frac{I}{6m}\sin\sqrt{\frac{3c}{m}}t\right) \cdot u(t).$$

Trường hợp có cản nhớt, phương trình vi phân dao động cơ hệ là:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{f},$$

với:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b & -b & 0 \\ -b & 2b & -b \\ 0 & -b & b \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix}, \ \mathbf{f} = \begin{bmatrix} I\delta(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Trường hợp này ta có $\mathbf{B} = \frac{b}{c}\mathbf{C} + 0 \cdot \mathbf{M}$ nên sử dụng phép đổi biến $\mathbf{x} = \mathbf{V}_n\mathbf{p}$ ta có phương trình vi phân dạng chuẩn:

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 = \dfrac{I}{\sqrt{3m}}\delta(t), \\ \ddot{p}_2 + \dfrac{b}{m}\dot{p}_2 + \dfrac{c}{m}p_2 = \dfrac{I}{\sqrt{2m}}\delta(t), \\ \ddot{p}_3 + \dfrac{3b}{m}\dot{p}_3 + \dfrac{3c}{m}p_3 = -\dfrac{I}{\sqrt{6m}}\delta(t). \end{cases}$$

Điều kiện đầu $\dot{p}_i(0) = p_i(0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Nghiệm của hệ ở dạng toạ độ chuẩn là:

$$\begin{cases} p_1(t) = \dfrac{I}{\sqrt{3m}}tu(t), \\ p_2(t) = \dfrac{I}{\sqrt{2m}\omega_2\sqrt{1-\delta_2^2}}e^{-2\frac{b}{m}t}\sin(\omega_2\sqrt{1-\delta_2^2}t)\cdot u(t), \\ p_3(t) = -\dfrac{I}{\sqrt{6m}\omega_3\sqrt{1-\delta_3^2}}e^{-\frac{3b}{2m}t}\sin(\omega_3\sqrt{1-\delta_3^2}t)\cdot u(t), \end{cases}$$

trong đó $2\delta_2 = \frac{b}{m}, 2\delta_3 = \frac{3b}{m}$.

Trở lại toạ độ suy rộng (x_1, x_2, x_3):

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}}p_2 - \frac{1}{\sqrt{6m}}p_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 + \frac{2}{\sqrt{6m}}p_3,$$

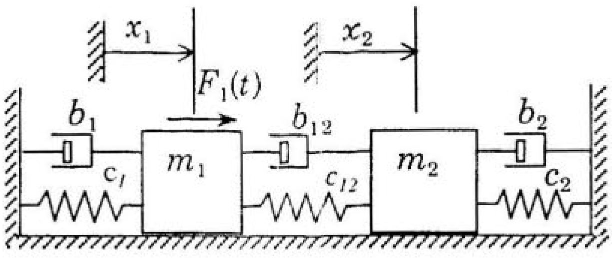
$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3m}}p_1 - \frac{1}{\sqrt{2m}}p_2 - \frac{1}{\sqrt{6m}}p_3.$$

Thí dụ 2.21 Cho mô hình hệ hai bậc tự do như hình TD 2.21. Lực $F_1(t)$ tác dụng lên khối lượng m_1 có dạng $F_1(t) = \widehat{F}_0 \sin \Omega t$.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

b) Xác định biên độ dao động cưỡng bức bình ổn.

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (x_1, x_2), trong đó x_1, x_2 là dịch chuyển của các khối lượng tính từ vị trí cân bằng tĩnh. Giả thiết rằng ở vị trí cân bằng tĩnh các lò xo không biến dạng.



Hình TD 2.21

Biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ là:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 + \frac{1}{2} c_{12} \left(x_2 - x_1\right)^2,$$

$$\Phi = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} b_{12} \left(\dot{x}_2 - \dot{x}_1\right)^2.$$

Thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại 2 nhận được phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \left(b_1 + b_{12}\right) \dot{x}_1 - b_{12} \dot{x}_2 + \left(c_1 + c_{12}\right) x_1 - c_{12} x_2 = \hat{F}_0 \sin \Omega t,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - b_{12} \dot{x}_1 + \left(b_2 + b_{12}\right) \dot{x}_2 - c_{12} x_1 + \left(c_2 + c_{12}\right) x_2 = 0.$$

Kí hiệu:

$$\gamma_1^2 = \frac{c_1 + c_{12}}{m_1}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_2 + c_{12}}{m_2}, \quad \delta_1 = \frac{b_1 + b_{12}}{2m_1}, \quad \delta_2 = \frac{b_2 + b_{12}}{2m_2},$$

thì các phương trình dao động trên có dạng:

$$\ddot{x}_1 + 2\delta_1 \dot{x}_1 - \frac{b_{12}}{m_1} \dot{x}_2 + \gamma_1^2 x_1 - \frac{c_{12}}{m_1} x_2 = \frac{\hat{F}_0}{m_1} \sin \Omega t, \tag{1}$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{b_{12}}{m_2} \dot{x}_1 + 2\delta_2 \dot{x}_2 - \frac{c_{12}}{m_2} x_1 + \gamma_2^2 x_2 = 0. \tag{2}$$

Sử dụng phương pháp biên độ phức để tìm nghiệm của hệ (1), (2). Viết lực dưới dạng $F_1(t) = F_0 e^{i\Omega t}$, tìm nghiệm dưới dạng $x_1 = \tilde{x}_1 e^{i\Omega t}, x_2 = \tilde{x}_2 e^{i\Omega t}$, trong đó $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ là các số phức cần tìm. Thế các biểu thức nghiệm trên vào các phương trình (1) và (2) nhận được:

$$-\tilde{x}_1\Omega^2 e^{i\Omega t} + 2\delta_1\tilde{x}_1 i\Omega e^{i\Omega t} + \gamma_1^2\tilde{x}_1 e^{i\Omega t} - \frac{b_{12}}{m_1}\tilde{x}_2 i\Omega e^{i\Omega t} - \frac{c_{12}}{m_1}\tilde{x}_2 e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m_1}e^{i\Omega t}, \quad (3)$$

$$-\tilde{x}_2\Omega^2 e^{i\Omega t} + 2\delta_2\tilde{x}_2 i\Omega e^{i\Omega t} + \gamma_2^2\tilde{x}_2 e^{i\Omega t} - \frac{b_{12}}{m_2}\tilde{x}_1 i\Omega e^{i\Omega t} - \frac{c_{12}}{m_2}\tilde{x}_1 e^{i\Omega t} = 0. \quad (4)$$

Khử $e^{i\Omega t}$ có hệ phương trình đại số tuyến tính xác định $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$:

$$\left(\gamma_1^2 - \Omega^2 + 2\delta_1\Omega i\right)\tilde{x}_1 + \left(-\frac{c_{12}}{m_1} - \frac{b_{12}}{m_1}\Omega i\right)\tilde{x}_2 = \frac{F_0}{m_1}, \quad (5)$$

$$\left(-\frac{c_{12}}{m_2} - \frac{b_{12}}{m_2}\Omega i\right)\tilde{x}_1 + \left(\gamma_2^2 - \Omega^2 + 2\delta_2\Omega i\right)\tilde{x}_2 = 0. \quad (6)$$

Giải hai phương trình trên nhận được:

$$\tilde{x}_1 = \frac{\frac{F_0}{m_1}\left(\gamma_2^2 - \Omega^2 + 2\delta_2\Omega i\right)}{\Delta}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{\frac{F_0}{m_1}\left(\frac{c_{12}}{m_2} + \frac{b_{12}}{m_2}\Omega i\right)}{\Delta}.$$

$$\Delta = \left(\gamma_1^2 - \Omega^2\right)\left(\gamma_2^2 - \Omega^2\right) - 4\delta_1\delta_2\Omega^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} + \frac{b_{12}^2}{m_1 m_2}\Omega^2$$
$$+\left[2\left(\gamma_1^2 - \Omega^2\right)\delta_2\Omega + 2\left(\gamma_2^2 - \Omega^2\right)\delta_1\Omega - \frac{2c_{12}b_{12}\Omega}{m_1 m_2}\right]i.$$

Như thế biên độ phức $\tilde{x}_1$ có dạng:

$$\tilde{x}_1 = \frac{a + ib}{c + id}.$$

Độ lớn của $\tilde{x}_1$ là:

$$\left|\tilde{x}_1\right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}.$$

Vậy ta có:

$$\left|\tilde{x}_1\right| = \sqrt{\frac{\left(F_0 / m_1\right)^2\left[\left(\gamma_2^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta_2^2\Omega^2\right]}{M}},$$

$$M = \left[\left(\gamma_1^2 - \Omega^2\right)\left(\gamma_2^2 - \Omega^2\right) - 4\delta_1\delta_2\Omega^2 - \frac{c_{12}^2}{m_1 m_2} + \frac{b_{12}^2}{m_1 m_2}\Omega^2 \right]^2 +$$
$$+ \left[2\delta_2\Omega\left(\gamma_1^2 - \Omega^2\right) + 2\delta_1\Omega\left(\gamma_2^2 - \Omega^2\right) - 2\frac{c_{12}b_{12}}{m_1 m_2}\Omega^2 \right]^2 .$$

Bằng cách tương tự ta tính được

$$|\tilde{x}_2| = \sqrt{\frac{\left(F_0/m_1\right)^2\left[\left(c_{12}/m_2\right)^2 + \left(b_{12}/m_2\right)^2\Omega^2\right]}{M}} .$$

Thí dụ 2.22 Mô hình dao động ba bậc tự do của hệ bàn tay - cánh tay con người chịu kích động điều hoà $F(t) = F_0 \sin\Omega t$ được biểu diễn trên hình TD 2.22a. Cho $m_1 = 3{,}47$ kg, $m_2 = 1{,}84$ kg, $m_3 = 0{,}11$ kg, $b_1 = 289$ kg/s, $b_2 = 184$ kg/s, $b_3 = 334$ kg/s, $c_1 = 0{,}79.10^4$ N/m, $c_2 = 2{,}35.10^4$ N/m, $c_3 = 11{,}1.10^4$ N/m, $F_0 = 50.10^{-4}$ N, $\Omega = 100\pi$ 1/s.

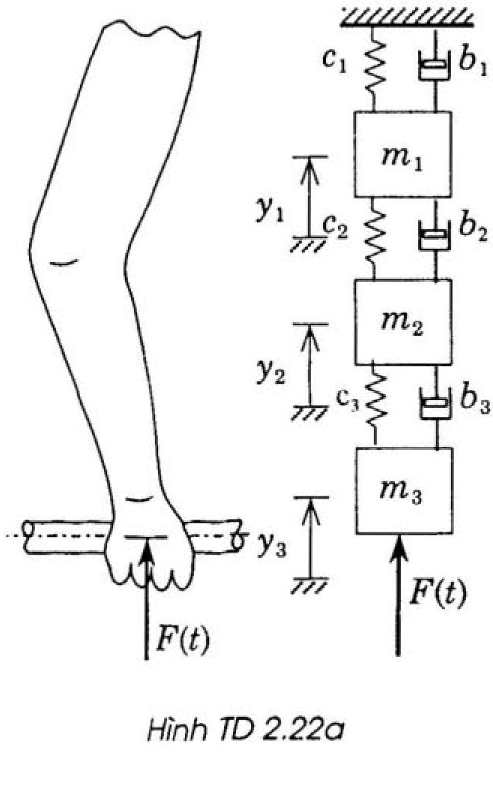
a) Xác định các tần số dao động riêng của cơ hệ.

b) Giả sử rằng ban đầu cơ hệ ở trạng thái tĩnh, tính toán dao động trong quá trình chuyển tiếp của hệ.

c) Tính toán dao động bình ổn của hệ.

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (y_1, y_2, y_3), trong đó y_i là dịch chuyển thẳng đứng của khối lượng m_i tính từ vị trí cân bằng tĩnh, $(i = 1 \div 3)$. Biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của cơ hệ là:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_3^2,$$
$$\Pi = \frac{1}{2}c_1 y_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(y_2 - y_1\right)^2 + \frac{1}{2}c_3\left(y_3 - y_2\right)^2,$$
$$\Phi = \frac{1}{2}b_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}b_2\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right)^2 + \frac{1}{2}b_3\left(\dot{y}_3 - \dot{y}_2\right)^2 .$$



Hình TD 2.22a

Thay thế các biểu thức trên vào phương trình Lagrange loại 2, nhận được phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{f},$$

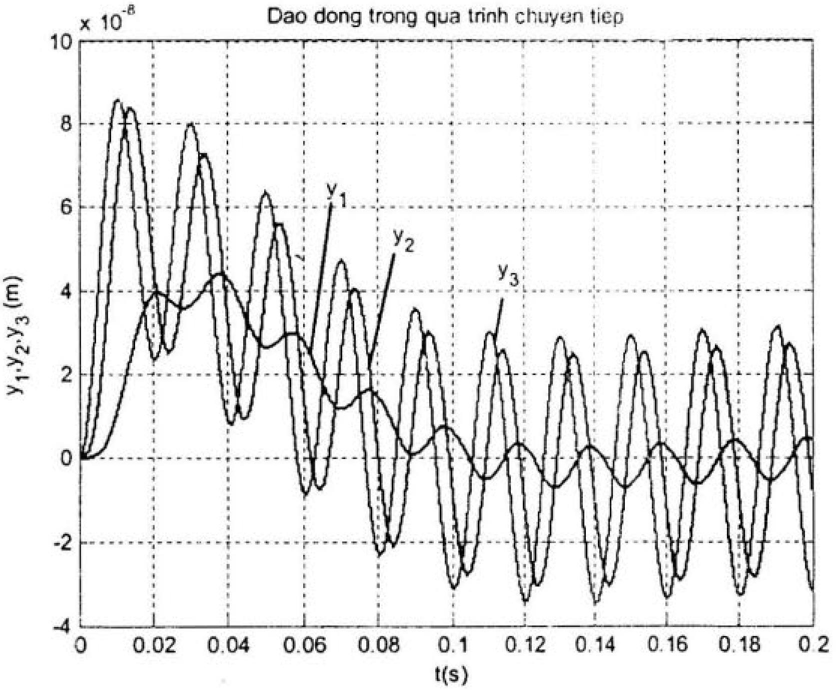
trong đó:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (b_1 + b_2) & -b_2 & 0 \\ -b_2 & (b_2 + b_3) & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 \end{bmatrix},$$

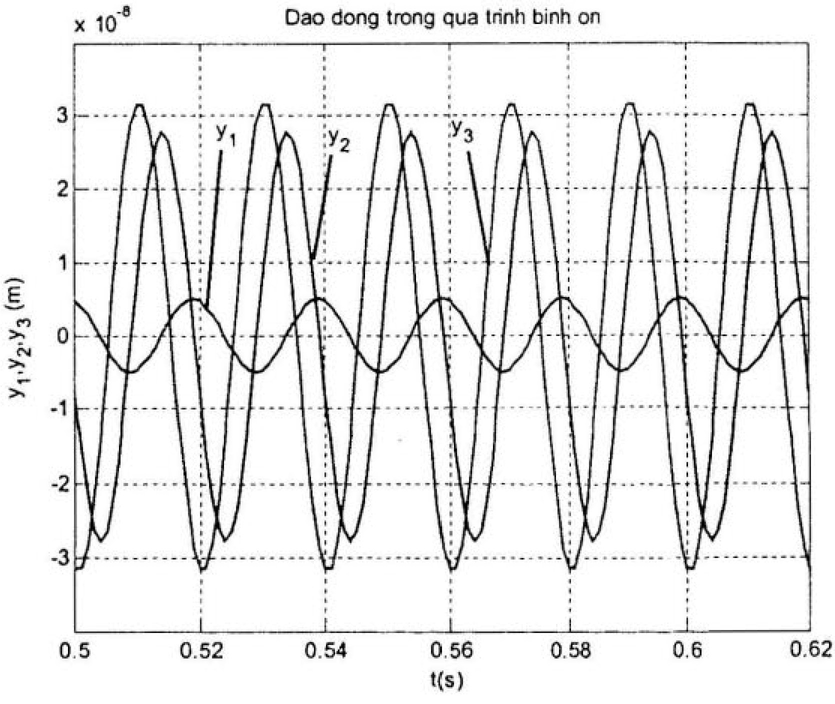
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0 \sin \Omega t \end{bmatrix}.$$

Để xác định các tần số riêng của cơ hệ, chúng ta giải phương trình đặc trưng $\left|\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}\right| = 0$. Với số liệu đã cho, sử dụng hệ chương trình MATLAB ta nhận được $\omega_1 = 37{,}31$ 1/s, $\omega_2 = 140{,}34$ 1/s, $\omega_3 = 1034{,}48$ 1/s.

Sử dụng hệ chương trình MATLAB để tích phân hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ với số liệu đã cho, chúng ta nhận được kết quả biểu diễn dao động của cơ hệ trên các đồ thị. Hình TD 2.22b biểu diễn dao động trong quá trình chuyển tiếp, còn hình TD 2.22c biểu diễn dao động ở trạng thái bình ổn.



Hình TD 2.22b



Hình TD 2.22c

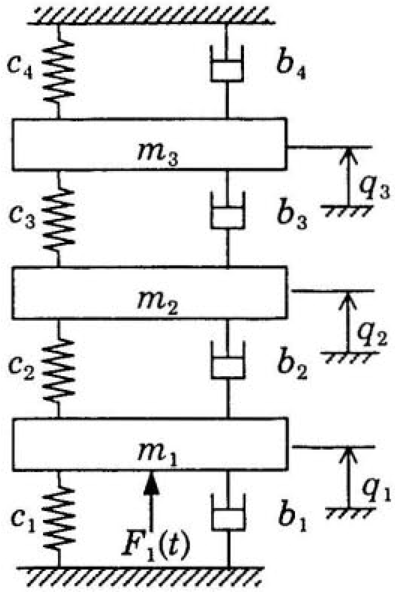
Thí dụ 2.23 Cho mô hình dao động của máy rung ba bậc tự do như hình TD 2.23. Trong đó m_1 là khối lượng bàn rung và động cơ gây rung, m_2 là khối lượng của khuôn và vật liệu, m_3 là khối lượng chày ép và xy lanh.

Lực quán tính ly tâm sinh ra do động cơ lệch tâm là $F_1(t) = m_e r_1 \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha)$, b_i $(i = 1 \div 4)$ là các hệ số cản, c_i $(i = 1 \div 4)$ là các hệ số cứng.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

b) Tìm biểu thức nghiệm bình ổn.

c) Cho các số liệu $m_1 = 151$ kg, $m_2 = 60$ kg, $m_3 = 130$ kg, $b_1 = 200$ kg/s, $b_2 = 1428$ kg/s, $b_3 = 1428$ kg/s, $b_4 = 0$ kg/s, $c_1 = 2{,}3.10^5$ N/m, $c_2 = 2{,}265.10^7$ N/m, $c_3 = 2{,}265.10^7$ N/m, $c_4 = 2{,}2.10^4$ N/m, $m_e r_1 = 0{,}06$ kg.m. Hãy tìm các tần số riêng, vẽ đồ thị đặc trưng biên độ tần số của hệ.



Hình TD 2.23a

Lời giải. a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của máy rung.

Chọn các toạ độ suy rộng của hệ là (q_1, q_2, q_3). Gốc toạ độ chọn tại điểm cân bằng tĩnh của các khối lượng. Các biểu thức động năng, thế năng và hàm hao tán của hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2 + m_3\dot{q}_3^2\right), \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1 q_1^2 + \frac{1}{2}c_2\left(q_2 - q_1\right)^2 + \frac{1}{2}c_3\left(q_3 - q_2\right)^2 + \frac{1}{2}c_4 q_3^2 \tag{2}$$

$$\Phi = \frac{1}{2}b_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}b_2\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1\right)^2 + \frac{1}{2}b_3\left(\dot{q}_3 - \dot{q}_2\right)^2 + \frac{1}{2}b_4\dot{q}_3^2 \tag{3}$$

Các lực suy rộng của các lực không thế có dạng:

$$\begin{aligned} Q_1^* &= F_1(t) = m_e r_1 \Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha), \\ Q_2^* &= 0, \\ Q_3^* &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Thế các biểu thức (1), (2), (3), (4) vào Largrange loại 2 ta thu được hệ phương trình vi phân dao động của máy rung:

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{q}_1 + (b_1 + b_2)\dot{q}_1 - b_2\dot{q}_2 + (c_1 + c_2)q_1 - c_2 q_2 = F_1(t),\\
&m_2\ddot{q}_2 - b_2\dot{q}_1 + (b_2 + b_3)\dot{q}_2 - b_3\dot{q}_3 - c_2 q_1 + (c_2 + c_3)q_2 - c_3 q_3 = 0, \qquad (5)\\
&m_3\ddot{q}_3 - b_3\dot{q}_2 + (b_3 + b_4)\dot{q}_3 - c_3 q_2 + (c_3 + c_4)q_3 = 0.
\end{aligned}$$

Dạng ma trận của (5) có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t), \qquad (6)$$

trong đó:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 + b_3 & -b_3 \\ 0 & -b_3 & b_3 + b_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

b) Biểu thức nghiệm bình ổn của phương trình vi phân (6) có dạng:

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}.\sin(\Omega t + \alpha) + \mathbf{v}.\cos(\Omega t + \alpha) = \mathbf{a}(\Omega).\sin(k\Omega t + \beta), \qquad (8)$$

trong đó các phần tử của véc tơ **a** là:

$$A_k(\Omega) = \sqrt{u_k^2(\Omega) + v_k^2(\Omega)} \qquad (k = 1,2,3). \qquad (9)$$

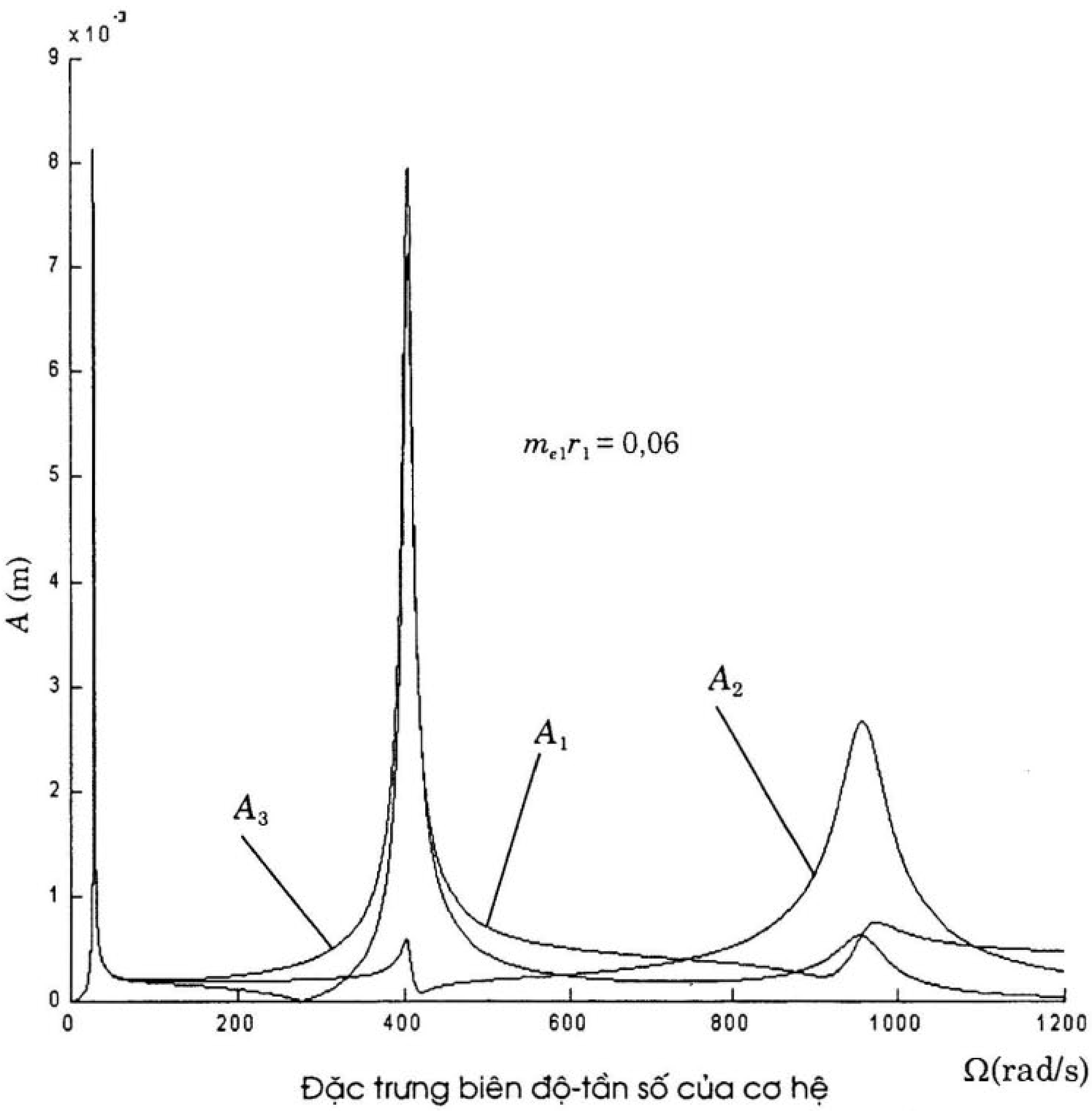
Thay (8) vào (6), cân bằng hệ số của $\sin(\Omega t + \alpha)$ và $\cos(\Omega t + \alpha)$, nhận được hệ phương trình xác định **u** và **v**:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{M} & -\Omega\mathbf{B} \\ \Omega\mathbf{B} & \mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

trong đó:

$$\mathbf{f}_0 = [m_e r_1 \Omega^2 \ \ 0 \ \ 0]^T.$$

c) Sử dụng số liệu đã cho và tính toán trên hệ chương trình MATLAB ta được các kết quả biểu diễn trên hình TD 2.23b.

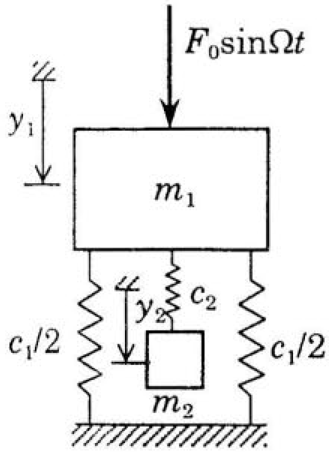


Hình TD 2.23b

Đây là đồ thị đặc trưng biên độ tần số của các toạ độ q_1, q_2, q_3. Từ hình vẽ ta thấy: khi $\Omega > 600$ 1/s thì máy làm việc có hiệu quả nhất. Biên độ dao động A_2 lớn, còn biên độ A_1 và A_3 nhỏ.

2.5 Bộ tắt chấn động lực

Thí dụ 2.24 Để dập tắt dao động cưỡng bức của hệ dao động gồm khối lượng m_1 lắp trên lò xo có độ cứng c_1 chịu lực kích thích $F_0 \sin\Omega t$ người ta dùng bộ tắt chấn động lực. Bộ tắt chấn động lực là hệ phụ gồm có khối lượng m_2 nối với hệ chính qua lò xo có độ cứng c_2. Tính toán các giá trị m_2, c_2 sao cho dao động cưỡng bức của khối lượng m_2 không vượt quá giới hạn cho phép $[a_2]$.



Hình TD 2.24

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng (y_1, y_2) là các dịch chuyển của khối tâm của các khối lượng so với vị trí cân bằng tĩnh.

Phương trình dao động của cơ hệ $\mathrm{M}\ddot{\mathrm{x}} + \mathrm{C}\mathrm{x} = \mathbf{f}$, trong đó:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin\Omega t .$$

Tìm dao động cưỡng bức của hệ ở dạng $\mathbf{x} = \mathbf{a}\sin\Omega t$, trong đó $\mathbf{a} = [a_1 \;\; a_2]^T$ xác định từ phương trình $(\mathbf{C} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{f}$.

Giả sử tần số riêng của cơ hệ là ω_1, ω_2.

Trường hợp $\Omega \neq \omega_1, \Omega \neq \omega_2$ (không cộng hưởng), chúng ta có:

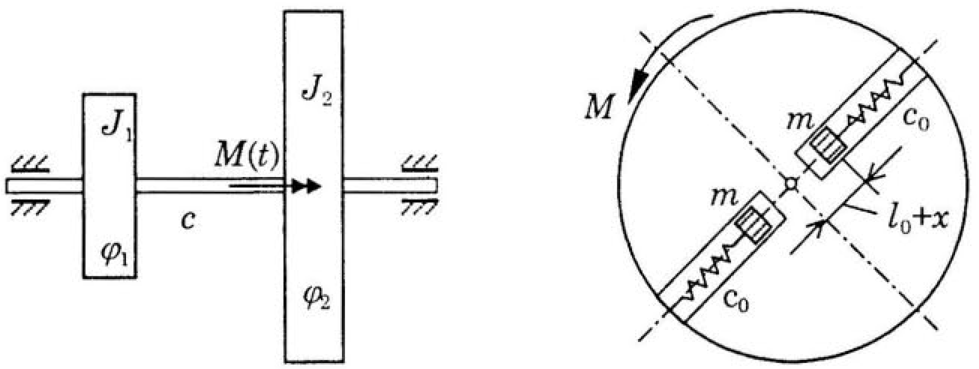
$$a_1 = \frac{F_0(c_2 - m_2\Omega^2)}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{F_0 c_2}{\Delta},$$

trong đó: $\Delta = (c_1 + c_2 - m_1\Omega^2)(c_2 - m_2\Omega^2) - c_2^2 = m_1 m_2(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$.

Như vậy để $a_1 = 0$ cần có $\dfrac{c_2}{m_2} = \Omega^2$. Ngoài ra, để cho $a_2 \leq [a_2]$, cần có

$$\frac{c_2 F_0}{\Delta} \leq [a_2] \text{ , hay: } \frac{\Omega^2 F_0}{m_1(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)} \leq [a_2].$$

Thí dụ 2.25 Cho hệ dao động xoắn gồm hai đĩa lắp trên trục đàn hồi, bỏ qua khối lượng của trục. Mô men quán tính đối với trục quay của các đĩa là J_1, J_2. Đĩa 2 chịu tác dụng ngẫu lực có mômen là $M(t) = M_0\sin 2\Omega t$. Độ cứng của trục là c. Ở chế độ bình ổn đĩa 1 quay với vận tốc góc Ω_0. Xác định các tham số m và c_0 của bộ tắt chấn động lực kiểu con trượt sao cho dao động xoắn của đĩa 2 triệt tiêu.



Hình TD 2.25

Lời giải. Ký hiệu φ_1, φ_2 là các góc quay của đĩa 1 và đĩa 2. Khi đĩa 2 quay ở vận tốc góc Ω_0, khoảng cách từ tâm trục đến trọng tâm các con trượt là l_0, độ dãn của các lò xo là x_0. Chọn toạ độ suy rộng của hệ là (q, x), trong đó q là góc xoắn của trục, x là biến dạng của các lò xo so với trạng thái bình ổn. Ta có $\varphi_1 = \Omega_0 t$, $\varphi_2 = \varphi_1 + q = \Omega_0 t + q$.

Động năng và thế năng của hệ có dạng:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + 2.\frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}J_1\Omega_0^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)^2 + m\left[\left(l_0 + x\right)^2\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)^2 + \dot{x}^2\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}cq^2 + \frac{2c_0\left(x_0 + x\right)^2}{2}. \tag{2}$$

Áp dụng phương trình Lagrange loại 2 nhận được phương trình vi phân dao động của hệ:

$$\left[J_2 + 2m\left(l_0 + x\right)^2\right]\ddot{q} + 4m\left(l_0 + x\right)\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)\dot{x} + cq = M_0\sin 2\Omega t, \tag{3}$$

$$2m\ddot{x} - 2m\left(l_0 + x\right)\left(\Omega_0^2 + \dot{q}^2 + 2\Omega_0\dot{q}\right) + 2c_0\left(x_0 + x\right) = 0 \ . \tag{4}$$

Chú ý rằng $c_0x_0 = ml_0\Omega_0^2$ và bỏ qua các số hạng phi tuyến nhận được:

$$\ddot{q} + \frac{4m\left(l_0 + x_0\right)\Omega_0}{J_2 + 2ml_0^2}\dot{x} + \frac{c}{J_2 + 2ml_0^2}q = \frac{M_0}{J_2 + 2ml_0^2}\sin 2\Omega t, \tag{5}$$

$$\ddot{x} \quad -2\Omega_0 l_0\dot{q} \quad + \left(\frac{c_0}{m} - \Omega_0^2\right)x \quad = 0. \tag{6}$$

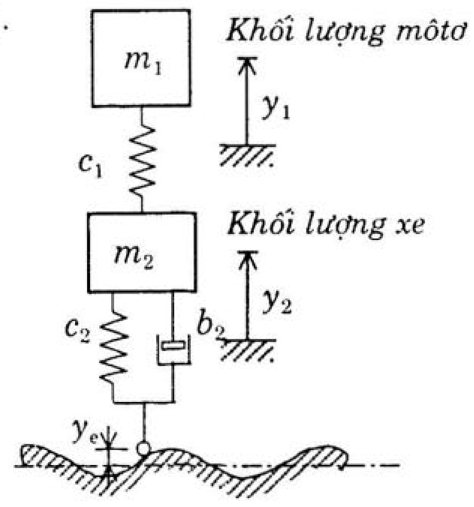
Do dạng của các phương trình vi phân (5) và (6) ta có thể tìm nghiệm bình ổn như sau:

$$q = A_1\sin\Omega t, \ x = A_2\cos 2\Omega t \tag{7}$$

Từ điều kiện A_1=0 ta suy ra điều kiện dập tắt dao động của đĩa 2:

$$\frac{c_0}{m} - \Omega_0^2 = 4\Omega^2 \Rightarrow \frac{c_0}{m} = 4\Omega^2 + \Omega_0^2 .$$

Thí dụ 2.26 Để giảm rung động lên người đi xe có thể sử dụng bộ tắt chấn động lực. Để không làm tăng khối lượng của xe người ta sử dụng khối lượng môtơ để làm khối lượng bộ tắt chấn của xe. Sử dụng mô hình dao động một bậc tự do của ôtô như hình vẽ, cho biết độ nhấp nhô mặt đường là $y_e(t)= e\cos\Omega t$. Hãy xác định khối lượng môtơ và độ cứng lò xo nối ghép.



Hình bài 2.26

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (y_1, y_2), trong đó y_1, y_2 là dịch chuyển của khối lượng môtơ và khối lượng xe so với chuyển động không dao động của xe trên đường thẳng ngang.

Phương trình vi phân dao động của cơ hệ là:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{h}(t), \tag{1}$$

trong đó:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 y_e(t) + b_2\dot{y}_e(t) \end{bmatrix}.$$

Do $y_e(t) = e\cos\Omega t$, nên biểu diễn phức của hàm $\mathbf{h}(t)$:

$$\mathbf{h}(t) = \frac{e}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ c_2 + ib_2\Omega \end{bmatrix} e^{i\Omega t} + \frac{e}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ c_2 - ib_2\Omega \end{bmatrix} e^{-i\Omega t}. \tag{2}$$

Vì hệ số của $e^{i\Omega t}$ và $e^{-i\Omega t}$ là hai số phức liên hợp nên chúng ta xét phương trình:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = \frac{e}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ c_2 + ib_2\Omega \end{bmatrix} e^{i\Omega t} = \tilde{\mathbf{f}}\, e^{i\Omega t}. \tag{3}$$

Tìm nghiệm phương trình (3) dưới dạng:

$$\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}\, e^{i\Omega t}. \tag{4}$$

Thế (4) vào (3) và rút gọn $e^{i\Omega t}$ nhận được:

$$\left(-\Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{f}}, \tag{5}$$

trong đó:

$$-\Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 - m_1\Omega^2 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2\Omega^2 + ib_2\Omega \end{bmatrix} \tag{6}$$

Các số phức $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ là nghiệm của phương trình (5):

$$\tilde{y}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \tilde{y}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{7}$$

trong đó:

$$\Delta = \det\left(-\Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{B} + \mathbf{C}\right) = \begin{vmatrix} c_1 - m_1\Omega^2 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 - m_2\Omega^2 + ib_2\Omega \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -c_1 \\ \frac{e}{2}\left(c_2 + ib_2\Omega\right) & c_1 + c_2 - m_2\Omega^2 + ib_2\Omega \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 - m_1\Omega^2 & 0 \\ -c_1 & \frac{e}{2}\left(c_2 + ib_2\Omega\right) \end{vmatrix}.$$

Tính toán cụ thể nhận được:

$$\tilde{y}_1 = \frac{ec_1\left(c_2 + ib_2\Omega^2\right)}{2\Delta}, \ \tilde{y}_2 = \frac{e\left(c_1 - m_1\Omega^2\right)\left(c_2 + ib_2\Omega\right)}{2\Delta}. \tag{9}$$

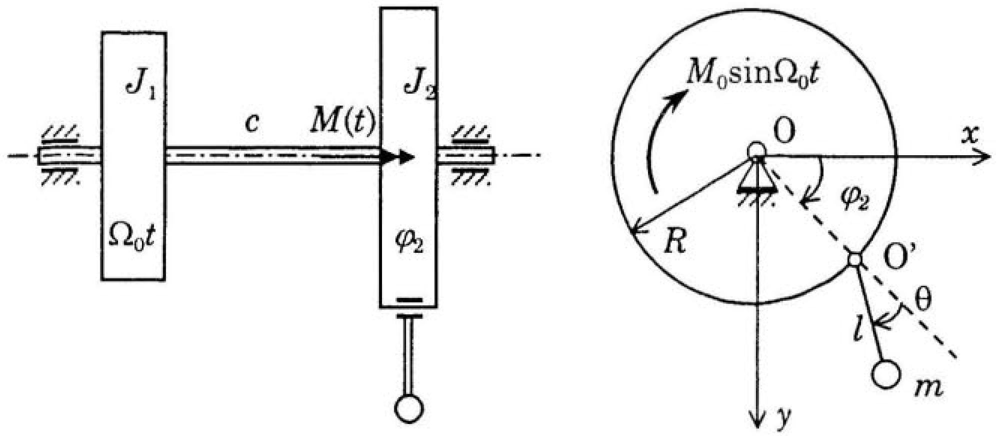
Từ (9) suy ra điều kiện để dập tắt dao động y_2 là $c_1 - m_1\Omega^2 = 0$, suy ra:

$$\Omega^2 = \frac{c_1}{m_1}. \tag{10}$$

Thí dụ 2.27 Đối với hệ quay thí dụ như động cơ ôtô, mômen kích động tỉ lệ với vận tốc góc Ω. Vì Ω thay đổi trong vùng rộng, nên để tần số riêng bộ tắt chấn tỉ lệ với Ω, người ta thường dùng bộ tắt chấn động lực con lắc ly tâm .

Xét hệ dao động xoắn gồm hai đĩa có mômen quán tính với trục quay là J_1, J_2. Đĩa 1 quay đều với vận tốc góc Ω_0 = const. Đĩa 2 chịu tác dụng của ngẫu lực kích động $M(t) = M_0\sin\Omega_0 t$. Độ cứng của trục là c.

Bộ tắt chấn động lực là con lắc toán học khối lượng m chiều dài l gắn với vành đĩa tại điểm O'. Xác định các tham số khối lượng m và chiều dài l để dập tắt dao động cưỡng bức của đĩa 2.



Hình TD 2.27

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng của cơ hệ là (q, θ), trong đó q là góc xoắn của trục ($\varphi_2 = \Omega_0 t + q$), θ là góc quay tương đối của con lắc đối với đĩa 2. Động năng của cơ hệ có dạng:

$$T = \frac{1}{2}J_1\Omega_0^2 + \frac{1}{2}J_2\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

trong đó:

$$\begin{aligned} v^2 &= R^2\dot{\varphi}_2^2 + l^2\left(\dot{\varphi}_2 + \dot{\theta}\right)^2 + 2Rl\dot{\varphi}_2\left(\dot{\varphi}_2 + \dot{\theta}\right)\cos\theta \\ &= R^2\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)^2 + l^2\left(\Omega_0 + \dot{q} + \dot{\theta}\right)^2 + 2Rl\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)\left(\Omega_0 + \dot{q} + \dot{\theta}\right)\cos\theta. \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \Omega_0^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\Omega_0 + \dot{q}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} m \left[R^2 \left(\Omega_0 + \dot{q}\right)^2 + l^2 \left(\Omega_0 + \dot{q} + \dot{\theta}\right)^2 + 2Rl\left(\Omega_0 + \dot{q}\right)\left(\Omega_0 + \dot{q} + \dot{\theta}\right)\cos\theta \right].$$

Bỏ qua trọng lực, thế năng cơ hệ là:

$$\Pi = \frac{1}{2} c q^2.$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2, bỏ qua các số hạng phi tuyến đối với q, $\dot{q}$, φ, $\dot{\varphi}$, nhận được phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ:

$$\left[J_2 + m(R+l)^2\right]\ddot{q} + ml(R+l)\ddot{\theta} + cq = M_0 \sin\Omega t \qquad (1)$$

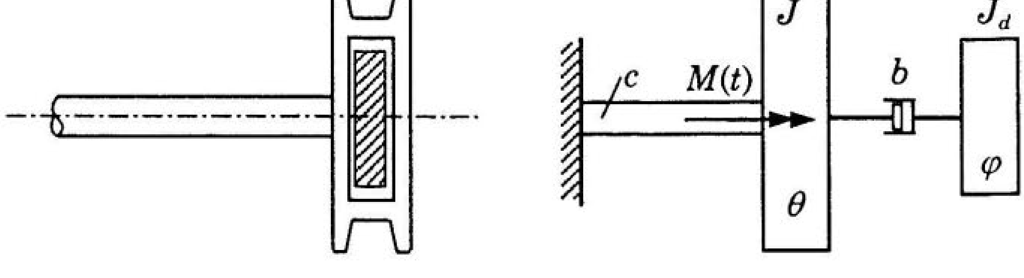
$$ml(R+l)\ddot{q} + ml^2\ddot{\theta} + mRl\Omega_0^2\theta = 0 \qquad (2)$$

Từ các phương trình (1) và (2) ta có thể tìm nghiệm riêng của hệ dưới dạng:

$$q = A_1 \sin\Omega t, \quad \theta = A_2 \cos\Omega t \qquad (3)$$

Thế (3) vào (1) và (2) ta suy ra các phương trình xác định A_1 và A_2. Từ điều kiện $A_1 = 0$ ta suy ra điều kiện dập tắt dao động cưỡng bức của đĩa 2 là $\Omega^2 = \frac{R}{l}\Omega_0^2$.

Thí dụ 2.28 Bộ tắt chấn động lực có ma sát nhớt biểu diễn như hình TD 2.27. Bánh đà có mômen quán tính đối với trục quay là J. Trục có độ cứng xoắn là c. Bộ tắt chấn là khối lượng quay có mômen quán tính J_d, có thể quay quanh cùng trục của bánh đà ở trong hốc đổ đầy chất lỏng nhớt. Hệ số lực cản nhớt là b. Giả sử bánh đà chịu tác dụng của mômen kích động $M_0 \sin\Omega t$. Hãy tính các thông số của bộ tắt chấn để làm giảm dao động cưỡng bức của bánh đà.



Hình TD 2.28

Lời giải. Chọn toạ độ suy rộng là (θ, φ), trong đó θ là góc quay của bánh đà, φ là góc quay của bộ tắt chấn. Phương trình vi phân chuyển động của hệ có dạng:

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} - b\dot{\varphi} + c\theta = M(t), \\ J_d\ddot{\varphi} - b\dot{\theta} + b\dot{\varphi} \qquad = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Sử dụng phương pháp biên độ phức để tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân dao động. Giả sử nghiệm phải tìm có dạng $\theta = \tilde{\theta}e^{i\Omega t}$, $\varphi = \tilde{\varphi}e^{i\Omega t}$, trong đó $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ là biên độ phức.

Đặt $M(t) = \tilde{M}_0 e^{i\Omega t}$, thay thế các biểu thức vào (1) ta có hệ phương trình để xác định các đại lượng phức $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{c}{J} - \Omega^2\right) + i\frac{b\Omega}{J}\right]\tilde{\theta} - i\frac{b\Omega}{J}\tilde{\varphi} = \frac{\tilde{M}_0}{J}, \\ &-i\frac{b\Omega}{J_d}\tilde{\theta} \qquad + \left(-\Omega^2 + i\frac{b\Omega}{J_d}\right)\tilde{\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Giải hệ (2) nhận được:

$$\frac{\tilde{\theta}}{\tilde{M}_0} = \frac{\Omega^2 J_d - ib\Omega}{\left[b^2 + \Omega^2 J_d\left(c - J\Omega^2\right)\right] + ib\Omega\left[\Omega^2 J_d - \left(c - J\Omega^2\right)\right]}. \tag{3}$$

Đặt $\omega_0^2 = \dfrac{c}{J}, \mu = \dfrac{J_d}{J}, b_0 = 2J\omega_0, \zeta = \dfrac{b}{b_0}$. Chú ý rằng nếu $\tilde{y} = \dfrac{a + i.b}{c + i.d}$ thì môđun của $\tilde{y}$ là $|\tilde{y}| = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$, ta có phương trình đối với biên độ:

$$\left|\frac{c\tilde{\theta}}{\tilde{M}_0}\right| = \sqrt{\frac{\mu^2\left(\Omega/\omega_0\right)^2 + 4\zeta^2}{\mu^2\left(\Omega/\omega_0\right)^2\left(1 - \Omega^2/\omega_0^2\right)^2 + 4\zeta^2\left[\mu\left(\Omega/\omega_0\right)^2 - \left(1 - \Omega^2/\omega_0^2\right)\right]^2}}. \tag{4}$$

Đây là hàm của 3 tham số ζ, μ, (Ω/ω_0).

Nếu $\zeta = 0$ $(b = 0)$ thì hệ trở thành một bậc tự do không cản với tần số cộng hưởng $\omega_1 = \sqrt{c/J}$. Nếu $\zeta = \infty$ $(b = \infty)$ thì hệ trở thành một bậc tự do không cản với tần số cộng hưởng là $\omega_1 = \sqrt{c/(J + J_d)}$.

Để chọn thông số tối ưu cho bộ tắt chấn, người ta vẽ đồ thị của $|c\tilde{\theta} / M_0|$ theo sự biến đổi của Ω / ω_0 với các giá trị khác nhau của ζ (xem [1]). Nhận xét rằng các đường cong này đều đi qua một điểm cố định P. Chọn $\zeta = 0$, $\zeta = \infty$, rồi cho giá trị vế phải (4) bằng nhau tại đó, ngoài ra điều kiện tối ưu cho giảm chấn là độ dốc của tiếp tuyến tại P bằng 0. Từ các điều kiện này chúng ta tìm được giá trị tối ưu ζ_{op}:

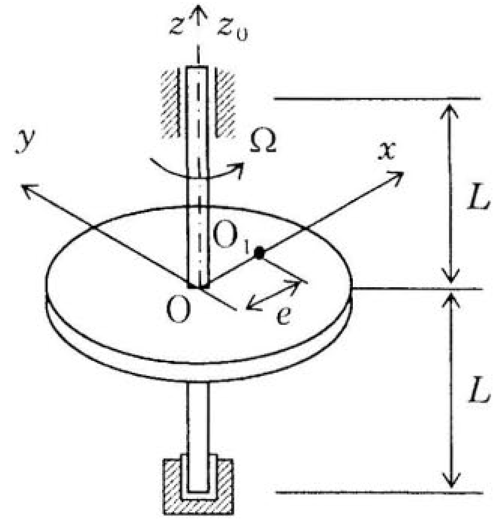
$$\zeta_{op} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)(2+\mu)}}, \quad \frac{\Omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2}{2+\mu}}. \tag{5}$$

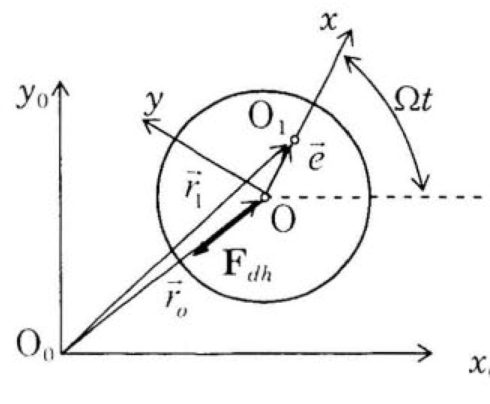
Khi đó $\tilde{\theta}_{max} = \frac{M_0}{c}\left(\frac{\mu+2}{\mu}\right)$.

2.6 Dao động uốn của rôto

Thí dụ 2.29 Đĩa đồng chất khối lượng m được gắn trên trục có khối lượng không đáng kể, dài $2L$, độ cứng uốn là EI. Trục quay với vận tốc góc Ω không đổi. Trọng tâm O_1 của đĩa cách trục một đoạn bằng e. Khảo sát chuyển động bình ổn của cơ hệ. Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ quanh trạng thái bình ổn.

Lời giải. Giả sử ở chế độ bình ổn của cơ hệ đĩa và trục quay đều xung quanh trục thẳng đứng z, đĩa có vị trí như hình TD 2.28b.





Hình TD 2.29

Vì đĩa chuyển động song phẳng, xét trong hệ $O_0x_0y_0$ cố định ta có:

$$m\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{dh}.$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{e}, \ \vec{F}_{dh} = -c\vec{r}_0, \text{ với } c = 6EI/L^3.$$

Nên suy ra hệ phương trình vi phân:

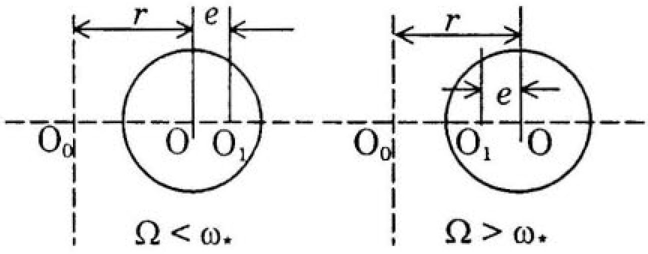
$$m\ddot{x}_1 + cx_1 = ce\cos\Omega t,$$

$$m\ddot{y}_1 + cy_1 = ce\sin\Omega t.$$

Dao động cưỡng bức bình ổn:

$$x_1 = \frac{e\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t,$$

$$y_1 = \frac{e\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\Omega t.$$



Hình TD2.29c

trong đó: $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$. Do đó: $\mathbf{r} = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2}\mathbf{e}$.

Khi $\Omega = \omega_0$ thì O đi xa vô tận, nên vận tốc góc giới hạn là $\omega_* = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Với $\Omega < \omega_*$ thì $O_0O = r - e$, $\Omega > \omega_*$ thì $O_0O = r - e$, $\Omega \to \infty$ thì $O_0O \to 0$.

Khảo sát dao động xung quanh trạng thái bình ổn.

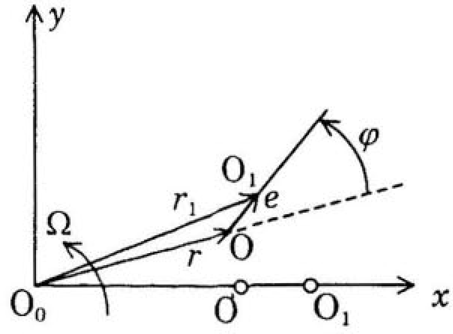
Chọn hệ trục O_0xy quay cùng với đĩa (hệ động). Vị trí của đĩa được xác định bởi vị trí khối tâm O_1 và góc quay φ như hình TD 2.29d.

Động năng, thế năng cơ hệ:

$$T = \frac{1}{2}mv_{O_1}^2 + \frac{1}{2}J_{O_1}(\Omega + \dot{\varphi})^2.$$

$$\mathbf{v}_{O_1} = \mathbf{v}_{O_1}^r + \mathbf{v}_{O_1}^e,$$

$$v_{O_1}^2 = (\dot{x}_1 - \Omega y_1)^2 + (\dot{y}_1 + \Omega x_1)^2.$$



Hình TD 2.29d

$$\Pi = \frac{1}{2}cr^2 = \frac{1}{2}c\left[\left(x_1 - e\cos\varphi\right)^2 + \left(y_1 - e\sin\varphi\right)^2\right].$$

Thay thế vào phương trình Lagrange loại 2 ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} m\left(\ddot{x}_1 - \Omega\dot{y}_1\right) - m\Omega\left(\dot{y}_1 + \Omega x_1\right) + c\left(x_1 - e\cos\varphi\right) = 0, \\ m\left(\ddot{y}_1 + \Omega\dot{x}_1\right) + m\Omega\left(\dot{x}_1 - \Omega y_1\right) + c\left(y_1 - e\sin\varphi\right) = 0, \\ J_{01}\ddot{\varphi} + c\left(x_1 - e\cos\varphi\right)e\sin\varphi - c\left(y_1 - e\sin\varphi\right)e\cos\varphi = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Xét dao động bé xung quanh trạng thái bình ổn nên:

$$x_1 = x_1^0 + \xi, \quad y_1 = \eta, \quad \sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1 \ .$$

Lưu ý rằng ở trạng thái bình ổn O', O, O_1 thẳng hàng, và:

$$m\Omega^2 x_1^0 = c\left(x_1^0 - e\right).$$

Biến đổi (1) về dạng phương trình vi phân dao động tương đối sau:

$$\begin{cases} \ddot{\xi} + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\xi - 2\Omega\dot{\xi} = 0, \\ \ddot{\eta} + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\eta - 2\Omega\dot{\eta} - \omega_0^2 e\varphi = 0, \\ \ddot{\varphi} + \omega_1^2 x_1^0\varphi - \omega_1^2\eta_1 = 0, \end{cases} \quad (2)$$

trong đó: $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{ce}{J_{01}}$.

Chú ý rằng hệ (2) đúng cho cả hai trường hợp $\Omega < \omega_*$ và $\Omega > \omega_*$

Bài tập Chương 2

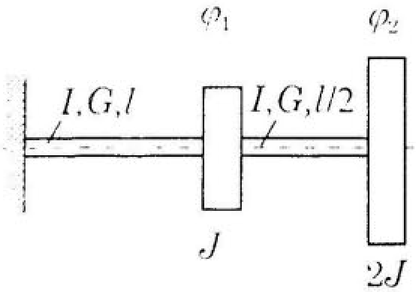
2.1 Thành lập phương trình dao động

Phương pháp sử dụng phương trình Lagrange loại 2

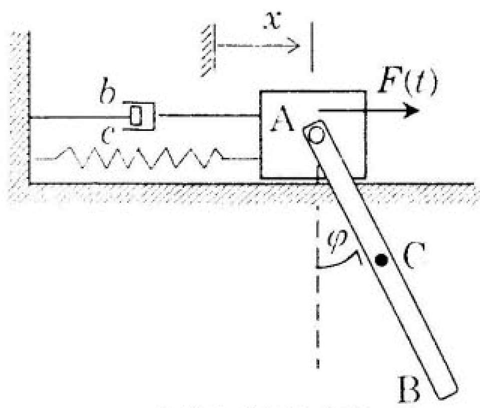
2.1.1 Thiết lập phương trình vi phân của cơ hệ dao động xoắn của hệ hai đĩa. Chọn toạ độ suy rộng là góc quay φ_1, φ_2 của các đĩa.

Đáp số: $J\ddot{\varphi}_1 + \dfrac{IG}{l}\left(3\varphi_1 - 2\varphi_2\right) = 0.$

$$2J\ddot{\varphi}_2 + \frac{IG}{l}\left(-2\varphi_1 + 2\varphi_2\right) = 0$$



Hình BT 2.1.1



Hình BT 2.1.2

2.1.2 Cho mô hình dao động ở hình BT 2.1.2. Vật nặng khối tâm A, khối lượng m_1 có thể trượt không ma sát trên nền ngang. Thanh AB đồng chất khối lượng m_2, chiều dài l gắn bản lề với vật nặng tại A. Sử dụng phương trình Lagrange loại hai, thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ. Trường hợp dao động bé, đưa phương trình vi phân về dạng tuyến tính.

Đáp số: Phương trình vi phân dao động:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \tfrac{1}{2} m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - \tfrac{1}{2} m_2 l\dot{\varphi}^2 \sin\varphi + b\dot{x} + cx = F(t),$$

$$\tfrac{1}{2} m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + \tfrac{1}{3} m_2 l^2\ddot{\varphi} + \tfrac{1}{2} m_2 gl\sin\varphi = 0.$$

Phương trình vi phân dao động bé:

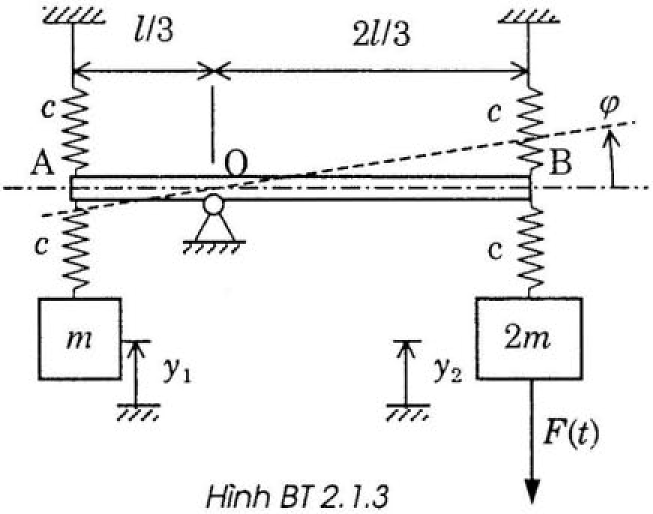
$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \tfrac{1}{2} m_2 l\ddot{\varphi} + b\dot{x} + cx = F(t),$$

$$\tfrac{1}{2} m_2 l\ddot{x} + \tfrac{1}{3} m_2 l^2\ddot{\varphi} + \tfrac{1}{2} m_2 gl\varphi = 0.$$

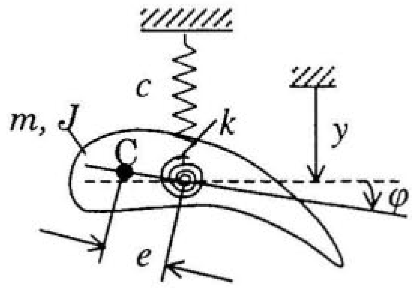
2.1.3 Cho AB là thanh đồng chất khối lượng m. Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ, chọn toạ độ suy rộng là (φ, y_1, y_2).

Đáp số:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{9}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{10}{9}cl^2\varphi + \frac{1}{3}cly_1 - \frac{2}{3}cly_2 = 0,\\
&m\ddot{y}_1 + \frac{1}{3}cl\varphi + cy_1 = 0,\\
&2m\ddot{y}_2 - \frac{2}{3}cl\varphi + cy_2 = -F(t).
\end{aligned}$$



Hình BT 2.1.3



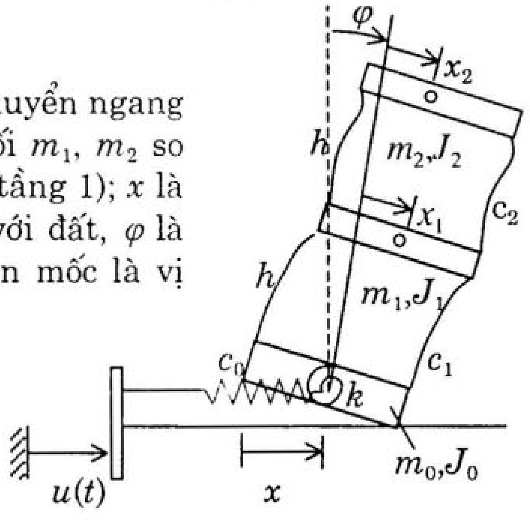
Hình BT 2.1.4

2.1.4 Mẫu thử thiết diện cánh máy bay có mômen quán tính đối với C là J. Mẫu thử được treo bằng lò xo thẳng độ cứng c và giữ bằng lò xo xoắn độ cứng k. Thiết lập phương trình vi phân dao động bé của hệ trong mặt phẳng thẳng đứng, chọn tọa độ suy rộng là (y, φ).

Đáp số: $$\begin{cases} m\ddot{y} - me\ddot{\varphi} + cy = 0,\\ -me\ddot{y} + \left(J + me^2\right)\ddot{\varphi} + k\varphi = 0. \end{cases}$$

2.1.5 Ngôi nhà hai tầng được mô hình thành ba khối đặt trên nền đàn hồi. Coi rằng nền móng nhà được gắn với các lò xo thẳng có độ cứng c_0 và lò xo xoắn có độ cứng k. Độ cứng của tường là c_1, c_2, chiều cao của chúng là h. Giả sử có động đất làm móng rung động ngang $u(t)$. Thiết lập phương trình vi phân dao động bé của cơ hệ, chọn toạ độ suy rộng là (x, φ, x_1, x_2).

Hướng dẫn: Chọn x_1, x_2 là các dịch chuyển ngang tương đối của khối tâm của các khối m_1, m_2 so với hệ động là khối m_0 (móng + nền tầng 1); x là dịch chuyển ngang của khối m_0 so với đất, φ là dịch chuyển quay của khối m_0. Chọn mốc là vị trí cân bằng tĩnh.



Hình BT 2.1.5

Đáp số:

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} + (m_1 + 2m_2)h\ddot{\varphi} + m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + c_0x = -(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{u},$$

$$(m_1 + 2m_2)h\ddot{x} + (J_0 + J_1 + J_2 + m_1h^2 + 4m_2h^2)\ddot{\varphi} + m_1h\ddot{x}_1 + 2m_2h\ddot{x}_2 + k\varphi = -(m_1 + 2m_2)h\ddot{u},$$

$$m_1\ddot{x} + m_1h\ddot{\varphi} + m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 + c_2x_2 = -m_1\ddot{u},$$

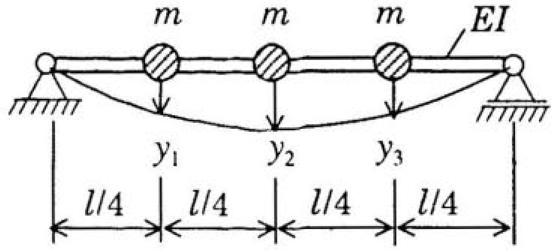
$$m_2\ddot{x} + 2m_2h\ddot{\varphi} + m_2\ddot{x}_2 - c_2x_1 + c_2x_2 = -m_2\ddot{u}.$$

Phương pháp lực

2.1.6 Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ có ba khối lượng m gắn trên dầm tựa đơn giản. Dầm có môđun đàn hồi E, mômen quán tính của thiết diện ngang là I. Bỏ qua khối lượng dầm.

Đáp số: Ma trận độ mềm

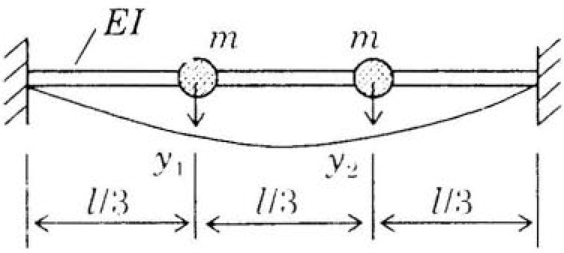
$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{\mathrm{EI}}\begin{bmatrix} \frac{3}{256} & \frac{11}{768} & \frac{7}{768} \\ \frac{11}{768} & \frac{1}{48} & \frac{11}{768} \\ \frac{7}{768} & \frac{11}{768} & \frac{3}{256} \end{bmatrix}.$$



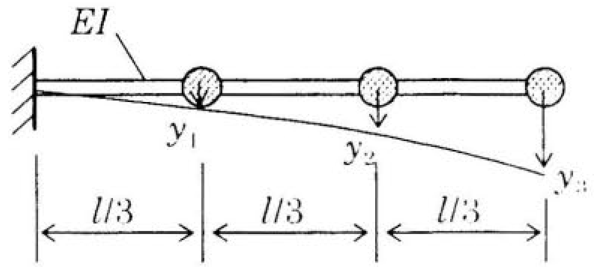
Hình BT 2.1.6

2.1.7 Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ có hai khối lượng m như nhau gắn trên dầm ngàm hai đầu. Dầm có môđun đàn hồi E, mômen quán tính của thiết diện ngang là I. Bỏ qua khối lượng của dầm.

Đáp số: Ma trận độ mềm $\mathbf{D} = \dfrac{l^3}{4374EI}\begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 11 & 16 \end{bmatrix}$.



Hình BT 2.1.7



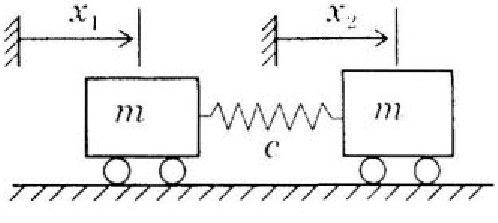
Hình BT 2.1.8

2.1.8 Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ có 3 khối lượng m như nhau gắn trên dầm côngxôn. Dầm có môđun đàn hồi E, mômen quán tính của thiết diện ngang là I. Bỏ qua khối lượng của dầm.

Đáp số: Ma trận độ mềm

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{81EI}\begin{bmatrix} 1 & 2.5 & 4 \\ 2.5 & 8 & 14 \\ 4 & 14 & 27 \end{bmatrix}.$$

2.2 Dao động tự do không cản



Hình BT 2.2.1

2.2.1 Tàu điện có hai toa nối với nhau bằng khớp nối có độ cứng bằng $2{,}8.10^6$ N/m, mỗi toa có khối lượng $2{,}2.10^4$ kg. Xác định các tần số riêng của hệ.

Đáp số: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2c}{m}} = 15{,}95$ rad/s.

2.2.2 Hệ dao động xoắn bao gồm trục có độ cứng c_1, moay ơ có bán kính r và mômen quán tính J_1, bốn lò xo lá có độ cứng mỗi lò xo là c_2 và bánh đà bên ngoài có bán kính R, mômen quán tính J_2. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động xoắn của hệ. Chỉ ra rằng phương trình tần số có dạng:

$$\omega^4 - \left(\omega_{11}^2 + \omega_{22}^2 + \frac{J_2}{J_1}\omega_{22}^2\right)\omega^2 + \omega_{11}^2\omega_{22}^2 = 0,$$

trong đó:

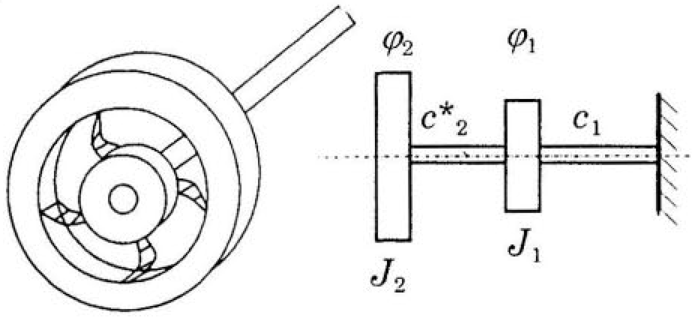
$$\omega_{11}^2 = \frac{c_1}{J_1}, \omega_{22}^2 = \frac{c_2^*}{J_2},$$

$$c_2^* = 4c_2\frac{R}{R-r}.$$

Đáp số:

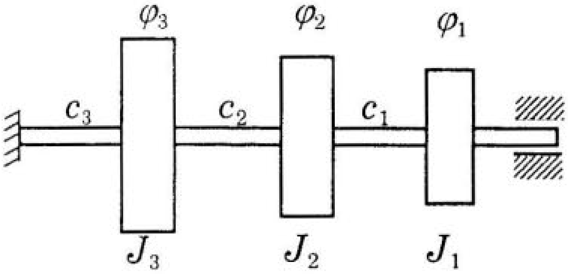
$$J_1\ddot{\varphi}_1 + (c_1 + c_2^*)\varphi_1 - c_2^*\varphi_2 = 0,$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2 \qquad - c_2^*\varphi_1 + c_2^*\varphi_2 = 0.$$



Hình BT 2.2.2

2.2.3 Cơ hệ gồm 3 đĩa gắn trên trục như hình BT 2.2.3. Mô men quán tính của các đĩa đối với trục quay là J_1, J_2, J_3. Độ cứng xoắn của các đoạn trục là c_1, c_2, c_3. Bỏ qua khối lượng của trục.



Hình BT 2.2.3

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

b) Cho $J_1 = 2{,}0.10^3$ kgm^2, $J_2 = 3{,}0.10^3$ kgm^2, $J_3 = 4{,}0.10^3$ kgm^2, $c_1 = 12.10^5$ Nm, $c_2 = 24.10^5$ Nm, $c_3 = 36.10^5$ Nm. Tính các tần số riêng của hệ.

c) Xác định các dạng dao động riêng, ma trận dạng riêng của hệ.

Đáp số:

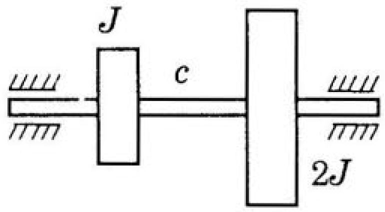
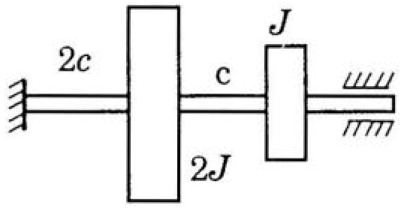
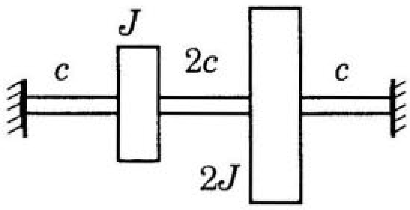
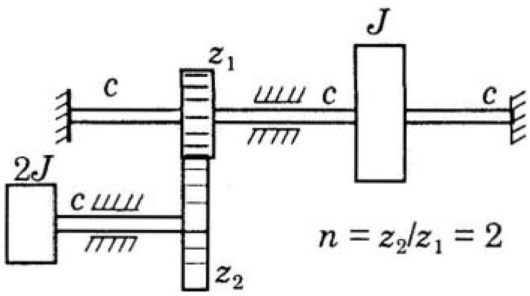
a)
$$J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1\varphi_1 - c_1\varphi_2 = 0,$$
$$J_2\ddot{\varphi}_2 - c_1\varphi_1 + (c_1 + c_2)\varphi_2 - c_2\varphi_3 = 0,$$
$$J_3\ddot{\varphi}_3 \qquad - c_2\varphi_2 + (c_2 + c_3)\varphi_3 = 0.$$

b) $\omega_1 = 14{,}52\, s^{-1}, \omega_2 = 31{,}05\, s^{-1}, \omega_3 = 46{,}1\, s^{-1}.$

c)
$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}649 & -0{,}607 & -2{,}540 \\ 0{,}302 & -0{,}679 & 2{,}438 \end{bmatrix}.$$

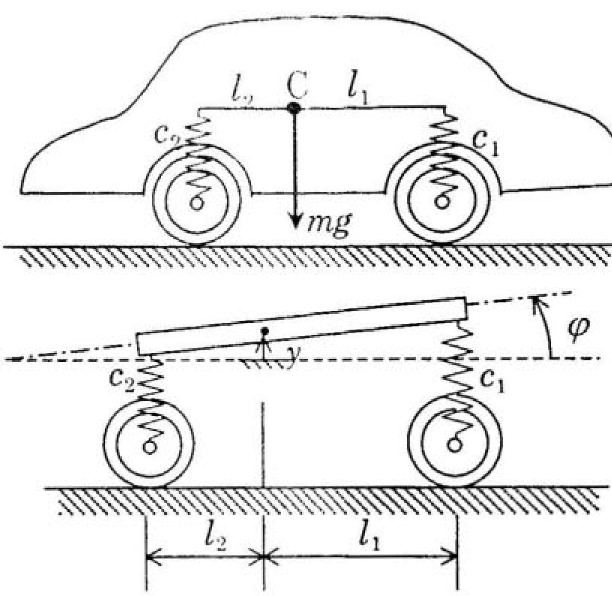
2.2.4 Thiết lập phương trình vi phân dao động của các hệ dao động xoắn trên hình BT 2.2.4 và tính các tần số riêng của hệ. Bỏ qua khối lượng các trục và các bánh răng. Cho độ cứng các đoạn trục và số răng z_k của các bánh răng.

Đáp số:

a) 	$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{c}{J}}$
b) 	$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2J}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2c}{J}}$
c) 	$\omega_1 = 0,8\sqrt{\frac{c}{J}}, \quad \omega_2 = 1,97\sqrt{\frac{c}{J}}$
d) 	$\omega_1 = 0,789\sqrt{\frac{c}{J}}, \quad \omega_2 = 1,174\sqrt{\frac{c}{J}}$

Hình BT 2.2.4

2.2.5 Mô hình xe ô tô là hệ dao động có hai bậc tự do biểu diễn trên hình BT 2.2.5. Thân xe (khung và vỏ) có khối lượng m, khoảng cách từ khối tâm của nó đến trục trước và sau là l_1, l_2, mômen quán tính đối với trục đi qua khối tâm là J. Bỏ qua khối lượng và độ đàn hồi của các bánh xe.



Hình BT 2.2.5

a) Thiết lập phương trình dao động bé của cơ hệ trong mặt phẳng thẳng đứng.

b) Trường hợp nào thì các tần số dao động riêng của hệ bằng nhau ?

c) Cho c_1 = 2000 N/cm, c_2 = 2000 N/cm, l_1 = 100 cm, l_2 = 150 cm, m = 1500 kg, J = 300 kgm^2. Tính các tần số dao động riêng.

Đáp số:

a) $$\begin{cases} m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y + (c_1l_1 - c_2l_2)\varphi = 0, \\ J\ddot{\varphi} + (c_1l_1 - c_2l_2)y + (c_1l_1^2 + c_2l_2^2)\varphi = 0. \end{cases}$$

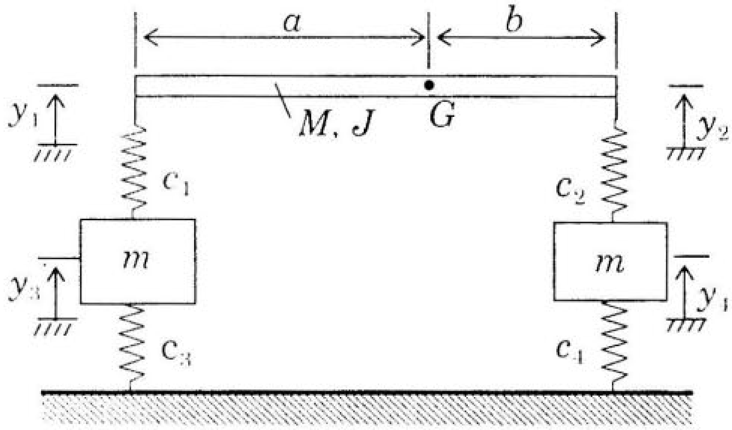
b) $\omega_1 = \omega_2$ nếu $\rho^2 = l_1 l_2$, với ρ là bán kính quán tính của thân xe đối với trục nằm ngang đi qua khối tâm C.

c) $\omega_1 = 16,5 \quad 1/s, \quad \omega_2 = 50 \quad 1/s.$

2.2.6 Mô hình ôtô là hệ dao động bốn bậc tự do được biểu diễn trên hình BT 2.2.6.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động bé của cơ hệ, chọn (y_1, y_2, y_3, y_4) làm toạ độ suy rộng.

b) Cho a = 3 m, b = 1 m, $c_1 = c_2 = 4.10^5$ N/m, $c_3 = c_4 = 10^5$ N/m, M = 200 kg, m = 30 kg, J = 200 kgm^2. Tính các tần số riêng.



Hình BT 2.2.6

Đáp số: a) Phương trình vi phân chuyển động

$$\begin{cases} \dfrac{J + Mb^2}{(a+b)^2}\ddot{y}_1 + \dfrac{-J + Mab}{(a+b)^2}\ddot{y}_3 + c_1y_1 - c_1y_3 = 0, \\ \dfrac{-J + Mab}{(a+b)^2}\ddot{y}_1 + \dfrac{J + Ma^2}{(a+b)^2}\ddot{y}_3 + c_2y_2 - c_2y_4 = 0, \\ m\ddot{y}_3 \qquad\qquad - c_1y_1 + (c_1 + c_3)y_3 = 0, \\ m\ddot{y}_4 \qquad\qquad - c_2y_2 + (c_2 + c_4)y_4 = 0. \end{cases}$$

b) $\omega_1 = 23{,}0$ 1/s, $\omega_2 = 44{,}2$ 1/s, $\omega_3 = 138{,}5$ 1/s, $\omega_4 = 188{,}8$ 1/s.

2.2.7 Hệ gồm ba khối lượng m như nhau gắn trên dầm tựa đơn giản. Dầm có độ cứng chống uốn là EI. Bỏ qua khối lượng của dầm.

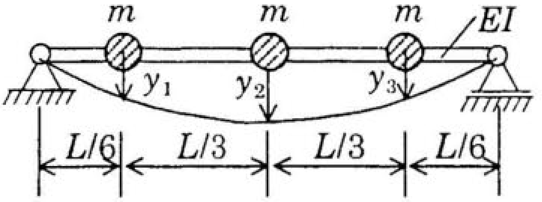
a) Thiết lập phương trình vi phân của cơ hệ.

b) Tính các tần số dao động riêng.

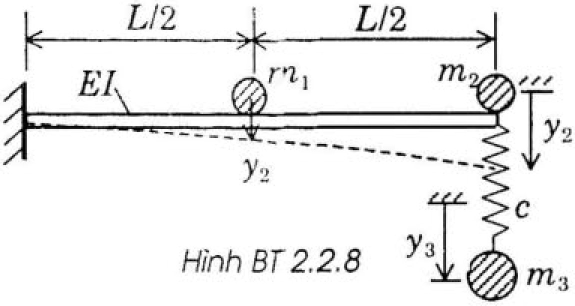
Đáp số:

a) $$\frac{mL^3}{3888EI}\begin{bmatrix} 25 & 39 & 17 \\ 39 & 81 & 39 \\ 17 & 39 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0.$$

b) $$\omega_1 = 5{,}7\sqrt{\frac{EI}{L^3}}, \quad \omega_2 = 22{,}04\sqrt{\frac{EI}{L^3}}, \quad \omega_3 = 36\sqrt{\frac{EI}{L^3}}.$$



Hình BT 2.2.7



Hình BT 2.2.8

2.2.8 Dầm công xôn mang ba khối lượng như hình BT 2.2.8. Dầm có độ cứng chống uốn là EI, lòxo có độ cứng là c. Bỏ qua khối lượng của dầm.

a) Thiết lập phương trình vi phân của cơ hệ.

b) Xác định các tần số dao động riêng của cơ hệ, nếu $L = 2$ m, $E = 200.10^9$ N/m^2, $I = 1{,}5.10^{-5}$ m^4, $c = 4.10^5$ N/m, $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 80$ kg, $m_3 = 40$ kg.

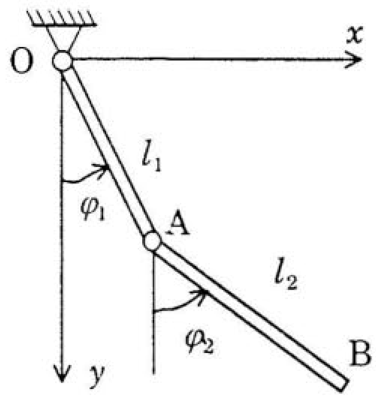
Đáp số:

a) Ma trận độ mềm

$$D = \frac{L^3}{48EI}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 5 & 16 & 16 \\ 5 & 16 & \dfrac{48EI}{cL^3} + 16 \end{bmatrix}.$$

b) $\omega_1 = 77{,}64$ 1/s, $\omega_2 = 147{,}30$ 1/s,

$\omega_3 = 858{,}66$ 1/s.



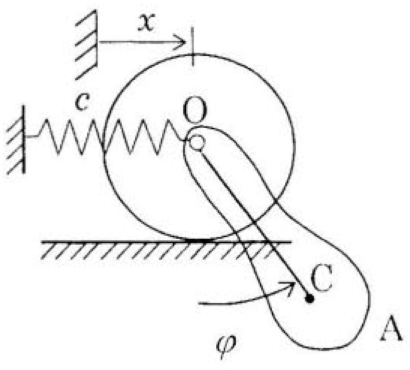
Hình BT 2.2.9

2.2.9 Một con lắc kép gồm hai khối thanh trụ đồng chất, tiết diện không đổi (hình BT 2.2.9). Cho $l_1 = 20$ cm, $l_2 = 25$ cm, diện tích các mặt cắt ngang $A_1 = 2$ cm^2, $A_2 = 1$ cm^2, khối lượng riêng $\rho = 7{,}85.10^{-3}$ kg/cm^3. Coi dao động là nhỏ. Tính các tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của hệ.

Đáp số:

$$\omega_1 = 5{,}8528, \quad \omega_2 = 13{,}917. \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}6706 & -1{,}7239 \end{bmatrix}.$$

2.2.10 Đĩa đồng chất khối lượng m, bán kính r lăn không trượt trên mặt phẳng ngang. Tấm OA gắn bản lề với đĩa tại O. Cơ hệ chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng. Tấm OA có khối lượng là m_1, mômen quán tính đối với khối tâm C là J, OC = L.



Hình BT 2.2.10

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động bé của cơ hệ.

b) Xác định tần số dao động riêng của hệ.

Cho $m = 2$ kg, $m_1 = 1$ kg, $L = 0{,}4$ m, $J = m_1L^2/2$, $c = 1000$ N/m.

Đáp số:

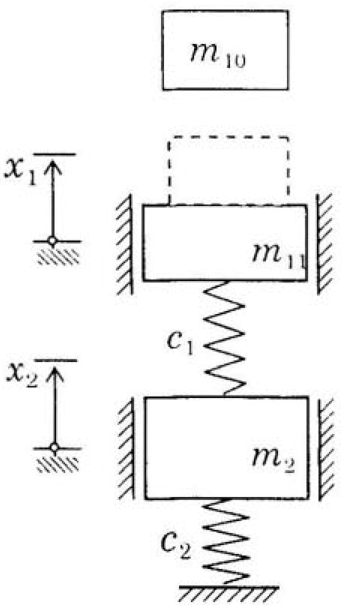
a) Phương trình vi phân chuyển động:

$$\left(\frac{3}{2}m + m_1\right)\ddot{x} + m_1L\ddot{\varphi} + cx = 0,$$

$$m_1L\ddot{x} + \left(J + m_1L^2\right)\ddot{\varphi} + m_1gL\varphi = 0.$$

b) Tần số riêng $\omega_1 = 4{,}02$ 1/s; $\omega_2 = 17{,}42$ 1/s.

2.2.11 Mô hình máy đột dập như hình BT 2.2.11. Khối lượng m_{10} va chạm dẻo với vận tốc v_0 vào khối lượng m_{11} làm cơ hệ hai khối lượng m_1 ($= m_{10} + m_{11}$) và m_2 dao động.



Hình BT 2.2.11

a) Xác định các tần số riêng và ma trận dạng riêng của cơ hệ.

b) Cho $m_{10} = m/10$, $m_{11} = 9m/10$, $m_2 = 4m/3$, $c_1 = c$, $c_2 = 3c/5$. Tìm quy luật dao động của hệ. Các khối lượng có dao động tuần hoàn hay không?

Đáp số:

a) $\omega_1 = 0.4777\sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $\omega_2 = 1.4042\sqrt{\dfrac{c}{m}}$. $\quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.7718 & -0{,}9718 \end{bmatrix}$.

b)
$$x_1(t) = v_0\sqrt{\frac{c}{m}}\left(0,1167\sin\omega_1 t + 0,03152\sin\omega_2 t\right),$$
$$x_2(t) = v_0\sqrt{\frac{c}{m}}\left(0,09\sin\omega_1 t - 0,0306\sin\omega_2 t\right).$$

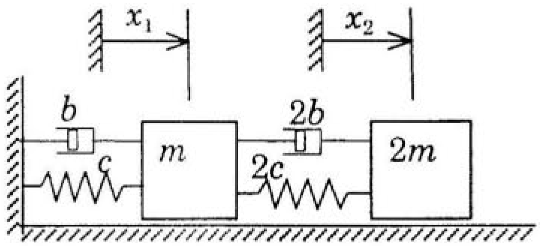
Các khối lượng m_1 và m_2 dao động không tuần hoàn.

2.3 Dao động tự do có cản

2.3.1 Mô hình dao động cơ hệ hai bậc tự do như hình BT 2.3.1.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

b) Tính tần số riêng, ma trận dạng riêng của hệ.



Hình BT 2.3.1

c) Hãy tìm quy luật chuyển động của cơ hệ bằng phương pháp ma trận dạng riêng. Cho m = 36 kg, c = 1,3.10^5 N/m, với giá trị nào của b thì cơ hệ dao động tắt dần ?

Đáp số: a) Phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3b\dot{x}_1 - 2b\dot{x}_2 + 3cx_1 - 2cx_2 = 0, \\ 2m\ddot{x}_2 - 2b\dot{x}_1 + 2b\dot{x}_2 - 2cx_1 + 2cx_2 = 0. \end{cases} \qquad \mathbf{B} = \frac{b}{c}\mathbf{C} + 0.\mathbf{M}.$$

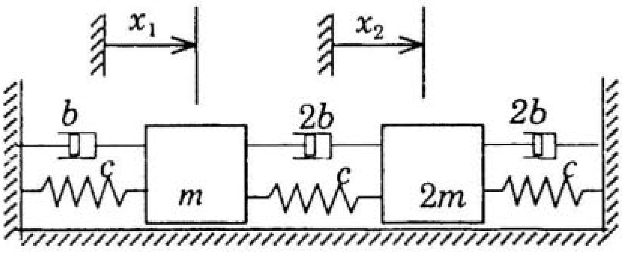
b) $$\omega_{10} = 0,5176\sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_{20} = 1,932\sqrt{\frac{c}{m}}. \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,366 & -0,366 \end{bmatrix}.$$

c) Phương trình vi phân dao động của cơ hệ dưới dạng toạ độ chính:

$$\begin{cases} \ddot{p}_1 + 2D_1\omega_{10}\dot{p}_1 + \omega_{10}^2 p_1 = 0, \\ \ddot{p}_2 + 2D_2\omega_{20}\dot{p}_2 + \omega_{20}^2 p_2 = 0. \end{cases}$$

Điều kiện dao động tắt dần: $D_1 < 1, D_2 < 1$, hay $b < 600,1132\ Ns/m$.

2.3.2 Mô hình dao động cơ hệ hai bậc tự do như hình BT 2.3.2. Hãy tìm quy luật chuyển động của cơ hệ bằng phương pháp trực tiếp. Cho m = 1 kg, c = 100 N/m, b = 2 Ns/m.



Hình BT 2.3.2

Đáp số:

Phương trình vi phân dao động

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3b\dot{x}_1 - 2b\dot{x}_2 + 2cx_1 - cx_2 = 0, \\ 2m\ddot{x}_2 - 2b\dot{x}_1 + 4b\dot{x}_2 - cx_1 + 2cx_2 = 0. \end{cases}$$

Tìm nghiệm ở dạng $\mathbf{x} = \mathbf{z}e^{\lambda t}$, phương trình đặc trưng:

$$2\lambda^4 + 20\lambda^3 + 632\lambda^2 + 2000\lambda + 30000 = 0$$

$$\lambda_1 = -1,057 \pm 7,907i,$$

$$\lambda_2 = -3,943 \pm 14,837i.$$

Véctơ riêng ứng với λ_k : $\mathbf{z}_k = \mathbf{u}_k \pm i\mathbf{v}_k$,

$$\mathbf{u}_1 = [0,74 \quad 1]^T, \qquad \mathbf{v}_1 = [0,067 \quad 0]^T,$$

$$\mathbf{u}_2 = [1 \quad 0,38]^T, \qquad \mathbf{v}_2 = [0 \quad 0,064]^T.$$

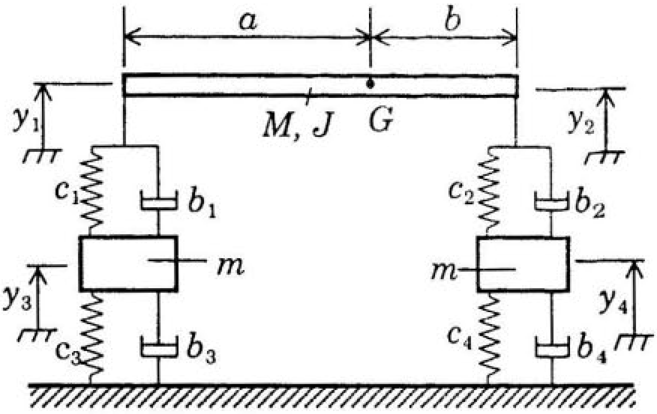
Nghiệm tổng quát:

$$\mathbf{x} = e^{-1,057t}\left[A_1(\mathbf{u}_1 \cos 7,907\,t - \mathbf{v}_1 \sin 7,907\,t) + B_1(\mathbf{u}_1 \sin 7,907\,t + \mathbf{v}_1 \cos 7,907\,t)\right] +$$
$$+\, e^{-3,943t}\left[A_2(\mathbf{u}_2 \cos 14,837t - \mathbf{v}_2 \sin 14,837t) + B_2(\mathbf{u}_2 \sin 14,837t + \mathbf{v}_2 \cos 14,837t)\right].$$

2.3.3 Mô hình xe ôtô là hệ dao động bốn bậc tự do biểu diễn trên hình BT 2.3.3. Cho a = 3 m, b = 1 m, $c_1 = c_2 = 4.10^5$ N/m, $c_3 = c_4 = 10^5$ N/m, M = 200 kg, m = 30 kg, J = 200 kgm^2, $b_1 = b_2$ = 2000 N/m, $b_3 = b_4$ = 500 Ns/m.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

b) Tìm quy luật dao động của cơ hệ.



Hình BT 2.3.3

Đáp số: Phương trình vi phân dao động của cơ hệ:

$$\frac{J+Mb^2}{(a+b)^2}\ddot{y}_1 + \frac{-J+Mab}{(a+b)^2}\ddot{y}_2 + b_1\dot{y}_1 - b_1\dot{y}_3 + c_1y_1 - c_1y_3 = 0,$$

$$\frac{-J+Mab}{(a+b)^2}\ddot{y}_1 + \frac{J+Ma^2}{(a+b)^2}\ddot{y}_2 + b_2\dot{y}_2 - b_2\dot{y}_4 + c_2y_2 - c_2y_4 = 0,$$

$$m\ddot{y}_3 \qquad - b_1\dot{y}_1 + (b_1+b_3)\dot{y}_3 - c_1y_1 + (c_1+c_3)y_3 = 0,$$

$$m\ddot{y}_4 \qquad - b_2\dot{y}_2 + (b_2+b_4)\dot{y}_4 - c_2y_2 + (c_2+c_4)y_4 = 0.$$

Tìm nghiệm dưới dạng $\mathbf{y} = \mathbf{z}e^{\lambda t}$, phương trình đặc trưng:

$$225.10^4\lambda^8 + 645.10^6\lambda^7 + 177475.10^6\lambda^6 + 198025.10^8\lambda^5 + 2297.10^{12}\lambda^4 +$$
$$+ 767.10^{14}\lambda^3 + 456.10^{16}\lambda^2 + 56.10^{18}\lambda + 16.10^{20} = 0.$$

$$\lambda_1 = -88{,}312 \pm 166{,}86i, \qquad \lambda_2 = -44{,}124 \pm 131{,}68i,$$
$$\lambda_3 = -5{,}66 \pm 43{,}67i, \qquad \lambda_4 = -5{,}327 \pm 22{,}5i.$$

Các véctơ riêng $\mathbf{z}_k = \mathbf{u}_k \pm i\mathbf{v}_k$ ứng với λ_k là:

$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.23 & -0.71 & 0.105 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.01 & -0.0098 & -0.104 \end{bmatrix}^T.$

$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -0.039 & -0.19 & 0.23 & 1.0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.018 & -0.018 & 0.0024 & 0.0 \end{bmatrix}^T.$

$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.23 & 0.90 & -0.21 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.065 & 0.0044 & -0.025 \end{bmatrix}^T.$

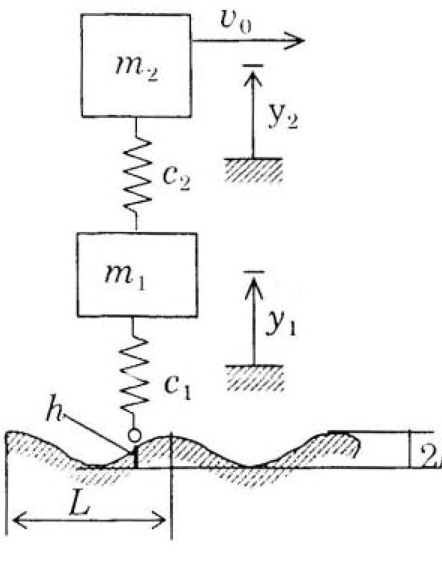
$\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0.21 & 1.0 & 0.17 & 0.83 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0.11 & 0.0 & 0.093 & -0.63 \end{bmatrix}^T.$

Nghiệm tổng quát:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} = {} & \\
& e^{88.312t}\left[A_1(\mathbf{u}_1\cos 166.86t - \mathbf{v}_1\sin 166.86t) + B_1(\mathbf{u}_1\sin 166.86t + \mathbf{v}_1\cos 166,86t)\right] + \\
& e^{44.124t}\left[A_2(\mathbf{u}_2\cos 131.68t - \mathbf{v}_2\sin 131.68t) + B_2(\mathbf{u}_2\sin 131.68t + \mathbf{v}_2\cos 131,68t)\right] + \\
& e^{5.66t}\left[A_3(\mathbf{u}_3\cos 43.67t - \mathbf{v}_3\sin 43.67t) + B_2(\mathbf{u}_3\sin 43.67t + \mathbf{v}_3\cos 43.67t)\right] + \\
& + e^{5.327t}\left[A_4(\mathbf{u}_4\cos 22.5t - \mathbf{v}_4\sin 22.5t) + B_2(\mathbf{u}_4\sin 22,5t + \mathbf{v}_4\cos 22.5t)\right].
\end{aligned}$$

2.4 Dao động cưỡng bức

2.4.1 Mô hình ôtô hai bậc tự do chạy trên mặt đường gồ ghề lượn sóng biểu diễn trên hình BT 2.4.1. Giả sử ôtô chuyển động đều với vận tốc v_0. Khối lượng thùng xe m_2 = 800 kg, khối lượng bánh xe m_1 = 200 kg, độ cứng của hệ thống treo $c_2 = 5.10^4$ N/m, độ cứng lốp xe $c_1 = 6.10^4$ N/m. Mặt đường có dạng hình sin với biên độ h_0, bước sóng L.



Hình BT 2.4.1

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ

b) Tính các tần số riêng, dạng riêng. Đưa phương trình vi phân dao động về dạng toạ độ chuẩn.

c) Tính các vận tốc tới hạn của xe.

Đáp số:

$$m_1\ddot{y}_1 + (c_1 + c_2)y_1 - c_2 y_2 = c_1 h_0 \cos\frac{2\pi v_0}{L}t,$$

$$m_2\ddot{y}_2 - c_2 y_1 + c_2 y_2 = 0.$$

b) Tần số riêng, dạng riêng:

$$\omega_1 = 5.62 \text{ rad/s}, \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.07 & -0.1736 \end{bmatrix}$$
$$\omega_2 = 24.36 \text{ rad/s},$$

Phương trình vi phân dao động ở dạng tọa độ chuẩn:

$$\ddot{p}_1 + \omega_1^2 p_1 = 982.7\, h_0 \cos \Omega t,$$
$$\ddot{p}_2 + \omega_2^2 p_2 = 3396.2\, h_0 \cos \Omega t.$$

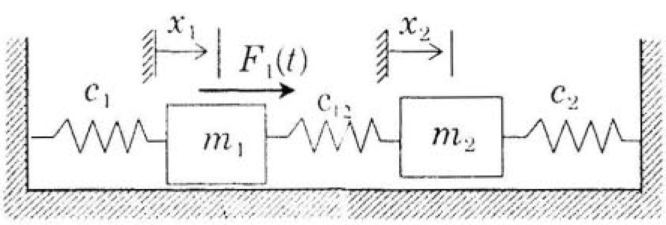
c) Vận tốc tới hạn: $v_{1,2}^* = \dfrac{L}{2\pi}\omega_{1,2}$.

2.4.2 Cơ hệ có hai khối lượng dao động cưỡng bức như hình BT 2.4.2.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

b) Tìm biểu thức xác định các tần số riêng của cơ hệ.

c) Cho $F_1(t) = \hat{F}_1 \sin\Omega t$. Chứng minh rằng khi Ω bằng một trong các tần số riêng của cơ hệ thì biên độ dao động cưỡng bức tăng lên vô cùng.



Hình BT 2.4.2

d) Vẽ đồ thị dao động cưỡng bức khi $c_2 = c_{12} = c$, $c_1 = 0$, $m_1 = m_2 = m$.

Đáp số: Phương trình vi phân dao động:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_{12})x_1 - c_{12}x_2 = F_1(t), \\ m_2\ddot{x}_2 - c_{12}x_1 + (c_2 + c_{12})x_2 = 0. \end{cases}$$

Phương trình tần số:

$$m_1 m_2 \omega^4 - \left[m_1(c_{12} + c_2) + m_2(c_{12} + c_1)\right]\omega^2 + c_1c_2 + (c_1 + c_2)c_{12} = 0\ .$$

Dao động cưỡng bức: $\mathbf{x} = \mathbf{A}\sin\Omega t$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}^T$,

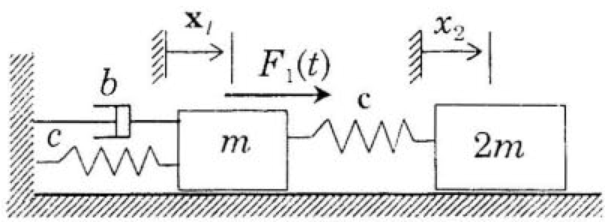
$$A_1 = \frac{c_{12} + c_2 - \Omega^2 m_2}{\Delta}\hat{F}_1, \qquad A_2 = \frac{c_{12}\hat{F}_1}{\Delta},$$

trong đó: $\Delta^* = m_1 m_2(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$, ω_1, ω_2 là các tần số riêng của cơ hệ. Do đó khi $\Omega \to \omega_1$, hoặc $\Omega \to \omega_2$ thì A_1 và $A_2 \to \infty$.

2.4.3 Cơ hệ có hai khối lượng dao động cưỡng bức như hình BT 2.4.3. Cho $F_1 = \hat{F}_1 \sin \Omega t$.

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của cơ hệ.

b) Tìm biên độ dao động cưỡng bức của các khối lượng.



Hình BT 2.4.3

Đáp số: Phương trình vi phân dao động:

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + 2cx_1 - cx_2 = \hat{F}_1 \sin \Omega t,$$
$$2m\ddot{x}_2 \qquad - cx_1 + cx_2 = 0.$$

Dao động cưỡng bức:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} \sin \Omega t + \mathbf{v} \cos \Omega t, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T.$$

$$u_1 = \frac{\left(c - 2m\Omega^2\right)\left(c^2 - 5cm\Omega^2 + 2m^2\Omega^4\right)\hat{F}_1}{\Delta^*}, v_1 = -\frac{\Omega b(c - 2m\Omega^2)^2 \hat{F}_1}{\Delta^*},$$

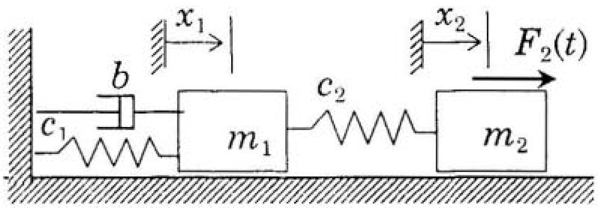
$$u_2 = \frac{c\left(c^2 - 5cm\Omega^2 + 2m^2\Omega^4\right)\hat{F}_1}{\Delta^*}, v_2 = -\frac{\Omega bc(c - 2m\Omega^2)\hat{F}_1}{\Delta^*}.$$

$$\Delta^* = c^4 + \left(c^2b^2 - 10c^3m\right)\Omega^2 + \left(29c^2m^2 - 4b^2cm\right)\Omega^4 +$$
$$+\left(4b^2m^2 - 20bm^3\right)\Omega^6 + 4m^4\Omega^8.$$

2.4.4 Cơ hệ có hai khối lượng liên kết và chịu lực như hình BT 2.4.4. Cho $m_1 = 80$ kg, $m_2 = 100$ kg, $c_1 = 1.10^5$ N/m, $c_2 = 2.10^5$ N/m, $b = 500$ Ns/m, $F_2(t) = 300 \sin\Omega t$ N, $\Omega = 80$ rad/s.

a) Xác định biên độ dao động cưỡng bức bình ổn của các khối lượng m_1 và m_2.

b) Xác định tần số Ω của lực kích động $F_2(t)$ để biên độ nói trên không vượt quá 1 mm.

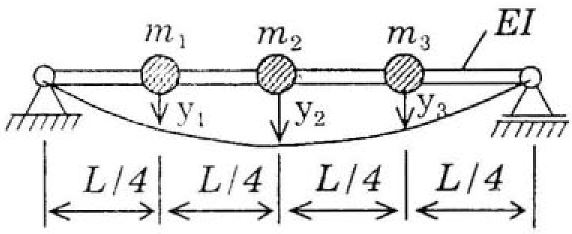


Hình BT 2.4.4

Đáp số:

a) $A_1 = 1{,}069.10^{-3}$ m, $A_2 = 1{,}153.10^{-3}$ m b) $\Omega > 80{,}434$ rad/s.

2.4.5 Ba máy có khối lượng $m_1 = m_2 = m_3 = 20$ kg đặt cách đều trên dầm tựa đơn, chiều dài $L = 2$m. Cho $E = 200.10^9$ N/m², $I = 1{,}35.10^{-6}$ m⁴. Máy có khối lượng m_1 làm việc với vận tốc góc $\Omega_1 = 100$ rad/s với lượng quay mất cân bằng $e\Delta m_1 = 0{,}5$ kgm.



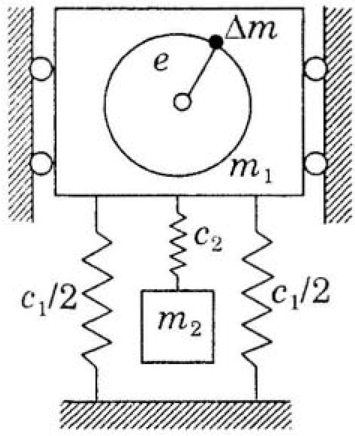
Hình BT 2.4.5

Xác định biên độ dao động cưỡng bức bình ổn của máy có khối lượng m_2.

Đáp số: $A_2 = 2{,}8.10^{-3}$ m.

2.5 Bộ tắt chấn động lực

2.5.1 Mô hình của máy có bộ phận quay lệch tâm biểu diễn trên hình BT 2.5.1. Bộ phận quay với vận tốc góc 50 rad/s, lượng mất cân bằng $\Delta m.e = 0{,}2$ kgm, $m_1 + \Delta m = 200$ kg, $c_1 = 4.10^5$ N/m. Tính toán các thông số m_2, c_2 của bộ tắt chấn động lực để dập tắt dao động cưỡng bức của máy và biên độ dao động cưỡng bức của bộ tắt chấn không vượt quá 5 mm.



Hình BT 2.5.1

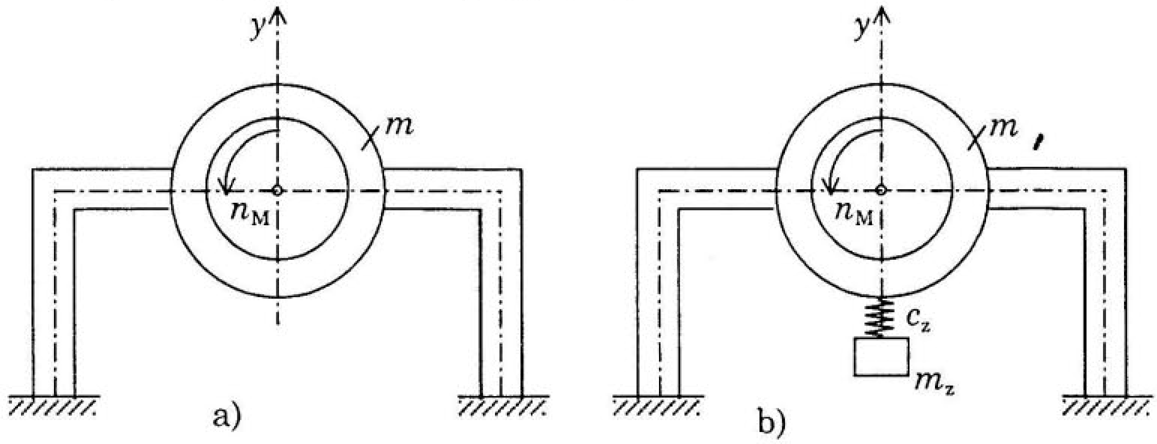
Đáp số: $m_2 = 40$ kg, $c_2 = 10^5$ N/m.

2.5.2 Máy khối lượng $m = 4000$ kg có phần khối lượng quay và được lắp đặt trên một kết cấu khung như hình BT 2.5.2a. Tại số vòng quay làm việc $n_M = 2400$ vg/ph xuất hiện dao động mạnh theo phương thẳng đứng y, coi như xuất hiện số vòng quay cộng hưởng.

a) Xác định hệ số cứng c_y của mô hình dao động một bậc tự do theo phương y của máy.

b) Để giảm dao động lớn ở chế độ làm việc của máy, người ta gắn vào máy một khối lượng phụ $m_z = 500$ kg với một lò xo cứng $c_z = 2.10^6$ N/m như hình bài 2.5.2b. Hãy tính các tần số riêng của hệ dao động theo phương y. Xác định các biên độ dao động cưỡng bức khi biết lượng mất cân bằng $\Delta m.e = 5$ kg.m.

c) Người ta phải chọn hệ số cứng của lò xo c_z bằng bao nhiêu để dập tắt hoàn toàn dao động theo phương y? Trong trường hợp đó, hãy xác định biên độ dao động của khối lượng phụ m_z.



Hình BT 2.5.2

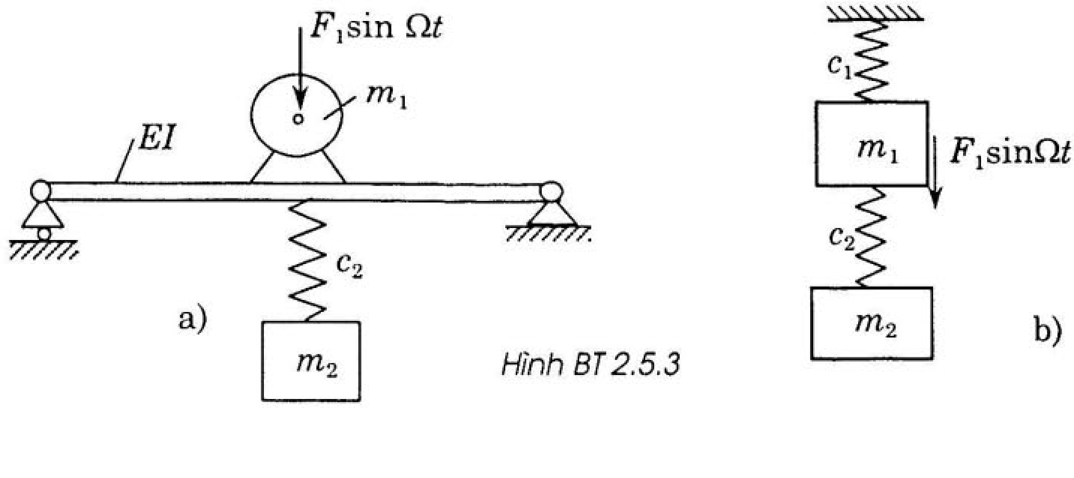
Đáp số:

a) $c_y = 256.10^5\pi^2$ N/m,

b) $\omega_1 = 62,98$, $\omega_2 = 252,39$ 1/s, $A_1 = 0,148$ m, $A_2 = 0,01$ m.

c) $c_z = 32\pi^2.10^5$ N/m, $A_2 = 0,01$ m.

2.5.3 Máy khối lượng $m_1 = 100$ kg đặt giữa dầm tựa đơn dài 3 m với môđun đàn hồi $E = 200.10^9$ N/m^2 và mômen quán tính của thiết diện ngang $I = 1,3.10^{-6}$ m^4. Máy hoạt động gây ra lực kích động điều hoà với biên độ $F_1 = 5000 \quad N$, tần số $600 \le n \le 700 \quad vg/ph$. Thiết kế bộ tắt chấn động lực không cản sao cho biên độ dao động cưỡng bức bình ổn không vượt quá 3 mm trong cả vùng làm việc của máy.



Hình BT 2.5.3

Đáp số: Hệ tương đương: hình BT 2.5.3b, $c_1 = \dfrac{48EI}{L^3} = 4,62.10^5$ N/m .

Tần số riêng hệ chính: $\omega_{10} = \sqrt{\dfrac{c_1}{m_1}} = 68,0\,\text{rad/s}$. Để dập tắt dao động của m_1 khi $\Omega = \omega_{10}$, chọn bộ tắt chấn có tần số $\omega_{20} = \sqrt{\dfrac{c_2}{m_2}} = 67,99\,\text{rad/s}$.

Biên độ dao động cưỡng bức A_1 của m_1 biểu diễn ở dạng:

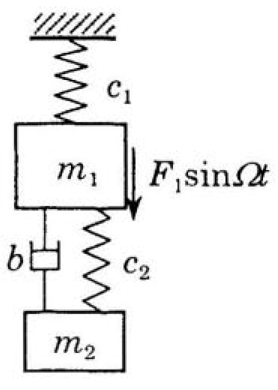
$$A_1 = \frac{F_1}{c_1}\left|\frac{1 - r_2^2}{r_1^2 r_2^2 - r_2^2 - (1+\mu)r_1^2 + 1}\right|, \text{ trong đó } r_1 = \frac{\Omega}{\omega_{10}}, r_2 = \frac{\Omega}{\omega_{20}}, \ \mu = \frac{m_2}{m_1}.$$

Khi $n_1 = 600$ vg/ph ($\Omega_1 = \dfrac{\pi n_1}{30} = 62,8\,\text{rad/s}$), chọn bộ tắt chấn có tần số ω_{20} như trên thì $r_1 = \Omega_1 / \omega_{10} = \Omega_1 / \omega_{20} \approx 0,924$. Cho $A_1 = 0,03$ m, tính được $\mu_1 \approx 0,641$.

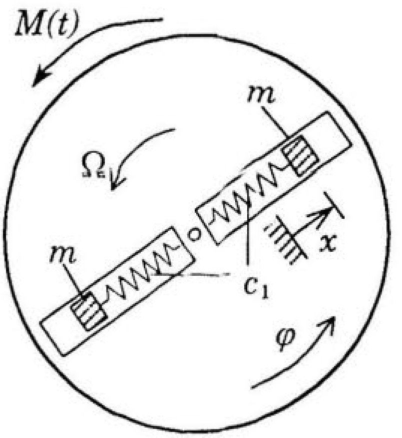
Khi $n_2 = 700$ v/ph ($\Omega_2 = 73,3$ rad/s), cho $A_1 = 0,03$ m tương tự tính được $\mu_2 = 0,527$.

Vì A_1 giảm khi μ tăng, nên để thoả mãn điều kiện giảm chấn cần chọn giá trị lớn $\mu_1 = 0,641$. Bộ tắt chấn (tần số ω_{20}) với $m_2 = \mu_1 m_1 = 64,08$ kg và $c_2 = m_2\omega_{20}^2 = 2,9622.10^5$ N/m.

2.5.4 Dùng bộ tắt chấn động lực có tính đến cản nhớt cho cơ hệ ở bài 2.5.3 (hình BT 2.5.4).



Hình BT 2.5.4



Hình BT 2.5.5

Khi máy làm việc với $n = 600$ vg/ph nếu chọn $\mu = \frac{m_2}{m_1} = 0,25$, hãy tính biên độ dao động cưỡng bức bình ổn của hệ chính nếu chọn các thông số của bộ tắt chấn là tối ưu.

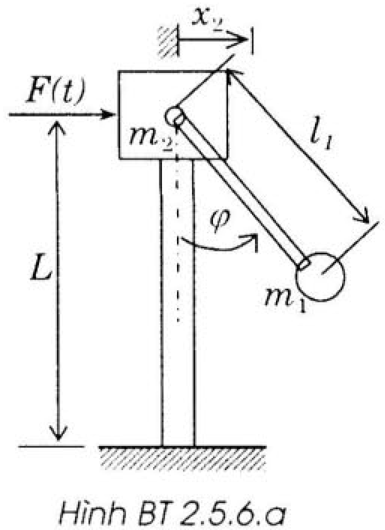
Đáp số: $x_1 = 2,9$ cm.

2.5.5 Để dập tắt dao động xoắn của trục quay người ta sử dụng bộ tắt chấn động lực kiểu con trượt. Đó là các khối lượng m gắn ở đầu mút các lò xo có thể trượt tự do theo bán kính của đĩa. Cho hệ gồm đĩa với mômen quán tính đối với trục quay bằng J được gắn trên trục với độ cứng xoắn là c. Ở chế độ bình ổn đĩa quay với vận tốc góc Ω_0, giả sử đĩa chịu tác dụng ngẫu lực với mômen $M(t) = M_0\sin\Omega t$. Xác định các tham số m và c_1 của bộ tắt chấn để dập tắt dao động xoắn cưỡng bức của đĩa.

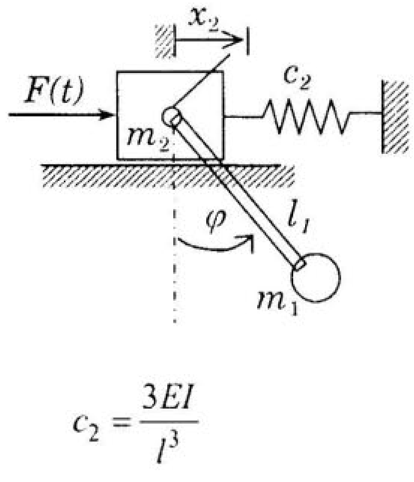
Đáp số: $\frac{c_1}{m} = \Omega^2 + \Omega_0^2$.

2.5.6 Để dập tắt dao động của bể nước khối lượng m_2 đặt trên đầu mút của cột đỡ, người ta sử dụng bộ tắt chấn động lực kiểu con lắc. Cho độ cứng uốn của cột là EI, lực tác động của gió $F(t) = F_0\sin\Omega t$. Hãy xác định các tham số m_1, l_1 của bộ tắt chấn.

Đáp số: $g/l_1 = \Omega^2$.



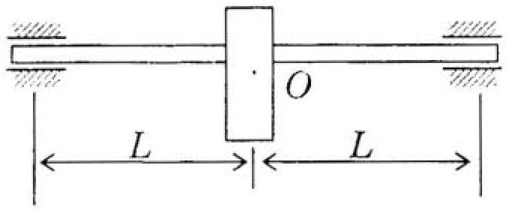
Hình BT 2.5.6.a



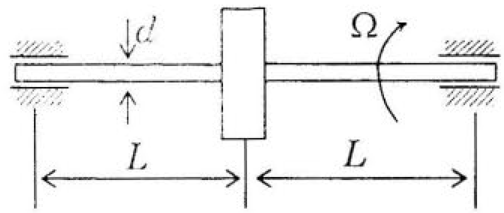
Hình BT 2.5.6.b

2.6 Dao động uốn của rôto

2.6.1 Rôto có khối lượng 40 kg, độ lệch tâm là 1.2 cm được gắn vào trục có độ cứng $3.2.10^5$ N/m và hệ số cản Lehr là 0.07. Tính độ võng của trục trong chuyển động bình ổn của hệ ở tốc độ 1000 vg/ph.



Hình BT 2.6.1



Hình BT 2.6.2.a

Đáp số: Tần số riêng $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} = 89.4 \quad rad/s,\ r = \dfrac{\Omega}{\omega_0} = 1.17$.

Biên độ của chuyển động xoay của trục

$$A = \frac{cr^2}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + (2Dr)^2}} = 4.07 \quad cm.$$

2.6.2 Bánh đà có khối lượng m gắn giữa trục đàn hồi đường kính d dài $2L$. Trục quay đều với vận tốc góc Ω. Độ lệch tâm của bánh đà bằng 0. Bỏ qua khối lượng của trục. Thành lập phương trình vi phân dao động bé của bánh đà quanh trạng thái chuyển động bình ổn. Tính biên độ dao động cưỡng bức bình ổn của cơ hệ, vận tốc góc tới hạn Ω^* của trục.

Hướng dẫn: Chọn hệ cố định $O_0x_0y_0z_0$, hệ động $Oxyz$ quay với vận tốc góc Ω cùng với trục. Vị trí trọng tâm O của bánh đà trong hệ động là (x, y).

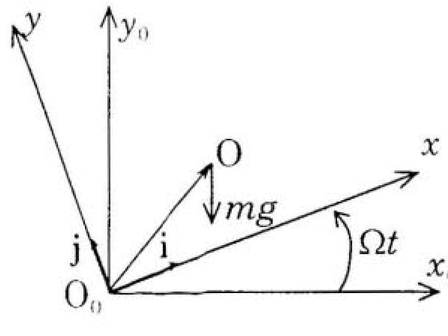
Động năng, thế năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \Omega^2 .$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0^r + \mathbf{v}_0^e,\ \mathbf{v}_0^r = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j},\ \mathbf{v}_0^e = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}.$$

$$v_0^2 = (\dot{x} - y\omega)^2 + (\dot{y} + x\omega)^2 .$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c\left(x^2 + y^2\right) + mg\left(x \sin \Omega t + y \cos \Omega t\right),$$



Hình BT 2.6.2.b

với $c = \dfrac{6EI_t}{l^3}$, $I_t = \dfrac{\pi d^4}{64}$.

Phương trình vi phân dao động:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)x - 2\Omega\dot{y} = -g\sin\Omega t, \\ \ddot{y} + \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)y + 2\Omega\dot{x} = -g\cos\Omega t, \end{cases} \quad \text{trong đó: } \omega_0^2 = \frac{c}{m}.$$

Dao động cưỡng bức: $x = A_1\sin\Omega t$, $y = A_2\cos\Omega t$. $A_1 = A_2 = -\dfrac{g}{\omega_0^2 - 4\Omega^2}$.

Vận tốc góc tới hạn: $\Omega^* = \dfrac{\omega_0}{2}$.

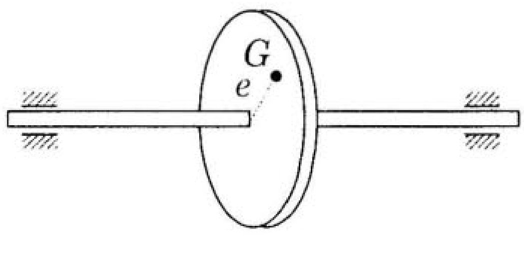
2.6.3 Một rô to xem như một đĩa tròn có khối lượng m = 55 kg, gắn vào trục có độ cứng c = $1{,}4\times10^7$ N/m, quay với vận tốc góc n = 6000 vòng/phút. Cho biết hệ số cản Lehre D = 0,05. Độ lệch tâm của đĩa là 1000 μm (e = 0,001 m). Hãy xác định:

a) Vận tốc tới hạn của đĩa,

b) Độ lớn biên độ dao động quay của đĩa theo phương thẳng đứng,

c) Biên độ dao động quay của đĩa với vận tốc quay tới hạn.

Đáp số: a) $n_{th} = 4817{,}6$ vòng/phút; b) $a_y = 0{,}0027116$ m, c) $a_y = 0{,}01$ m.



Hình BT 2.6.3

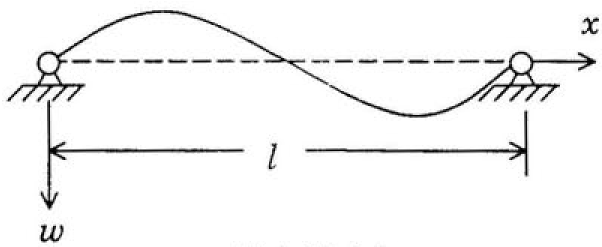
Chương III

Dao động tuyến tính của hệ vô hạn bậc tự do

3.1 Dao động uốn của dây

3.1.1 *Dao động uốn tự do của dây*

Thí dụ 3.1 Biết ở thời điểm đầu ($t = 0$) độ lệch của dây đồng chất, nằm ngang có dạng $w = w_0 \sin\frac{\pi x}{l}$, vận tốc bằng không. Tìm độ lệch ở các thời điểm tiếp sau. Giả thiết rằng sức căng của dây S luôn không đổi, khối lượng đơn vị dài của dây là μ.



Hình TD 3.1

Lời giải. Ta biết nghiệm dao động tự do của dây có hai đầu gắn chặt có dạng:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}ct\right) \tag{3.1}$$

trong đó:

$$c^2 = S/\mu \tag{3.2}$$

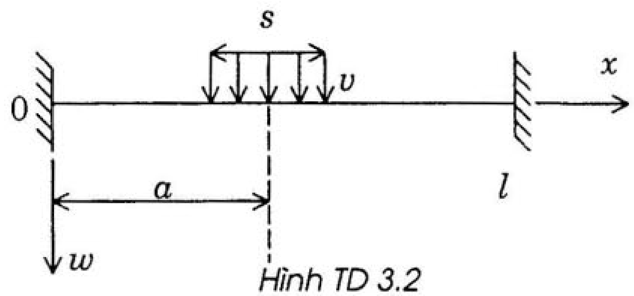
từ điều kiện đầu

$$\begin{cases} w(x,0) = w_0 \sin\dfrac{\pi x}{l} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad A_1 = w_0$, còn lại các hệ số khác đều triệt tiêu

Vậy: $\quad w(x,t) = w_0 \sin(\frac{\pi x}{l})\cos(\frac{\pi c}{l}t)$.

Thí dụ 3.2 Người ta xem rằng khi gõ búa vào một sợi dây ở vị trí $x = a$ như hình TD 3.2 thì sợi dây được truyền vận tốc đầu v không đổi trong khoảng $(a - \frac{s}{2}, a + \frac{s}{2})$, phần còn lại của dây không chịu ảnh hưởng. Tìm dao động uốn của dây.



Hình TD 3.2

Lời giải. Nghiệm dao động uốn tự do của dây đồng chất với hai đầu cố định có dạng (3.1):

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}ct\right).$$

Từ điều kiện đầu

$$\begin{cases} w(x,0) = 0 \\ \dot{w}(x,0) = \begin{cases} v & \textit{trong khoảng } (a - \frac{s}{2}, a + \frac{s}{2}) \\ 0 & \textit{còn lại} \end{cases} \end{cases}$$

ta rút ra: $A_n = 0\ \forall n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\frac{\pi c}{l}B_n . \sin n\frac{\pi}{l}x = \dot{w}(x,0)$

$$\Rightarrow \int_0^l n\frac{\pi c}{l}B_n \sin^2 n\frac{\pi}{l}xdx = \int_0^l \dot{w}(x,0)\sin n\frac{\pi}{l}xdx$$

$$\Rightarrow n\frac{\pi c}{l}B_n\frac{l}{2} = \int_{a-s/2}^{a+s/2} v\sin n\frac{\pi}{l}xdx = v\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{a-s/2}^{a+s/2}$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{2}{n\pi c}v\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\left[-2\sin n\frac{\pi a}{l}\sin\frac{n\pi s}{2l}\right] = \frac{4vl}{n^2\pi^2 c}\sin n\frac{\pi a}{l}\sin\frac{n\pi s}{2l}$$

Vậy:

$$w(x,t) = \frac{4vl}{\pi^2 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\sin n\frac{\pi a}{l}.\sin n\frac{\pi s}{l}.\sin n\frac{\pi x}{l}.\sin n\frac{\pi c}{l}t$$

Thí dụ 3.3 Một dây đồng chất được buộc chặt hai đầu và chịu một lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc hệ số β trên suốt chiều dài dây. Giả thiết rằng sức căng dây S luôn không đổi. Tìm dao động uốn tự do của dây.

Lời giải. Lực cản của một phân tố dây có chiều dài dx là $-\beta \dfrac{\partial w}{\partial t} dx$,

Vì vậy phương trình dao động tự do của dây trong trường hợp này có dạng:

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} = S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3.3}$$

Ta tìm nghiệm của (3.3) dưới dạng:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) . \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{3.4}$$

Thay (3.4) vào (3.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{T}_n + \frac{\beta}{\mu} \dot{T}_n + n^2 \frac{\pi^2 S}{l^2 \mu} T_n \right] . \sin n \frac{\pi x}{l} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{T}_n + \frac{\beta}{\mu} \dot{T}_n + n^2 \frac{\pi^2 S}{l^2 \mu} T_n = 0$$

Nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$T_n = e^{-\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)t} \left(A_n . \cos \omega_n t + B_n . \sin \omega_n t \right)$$

trong đó: $\omega_n = \sqrt{n^2 \dfrac{\pi^2}{l2} . \dfrac{S}{\mu} - \dfrac{\beta^2}{4\mu^2}}$

Vậy: $$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin n \frac{\pi x}{l}) . e^{-(\frac{\beta}{2\mu})t} (A_n . \cos \omega_n t + B_n . \sin \omega_n t) \tag{3.5}$$

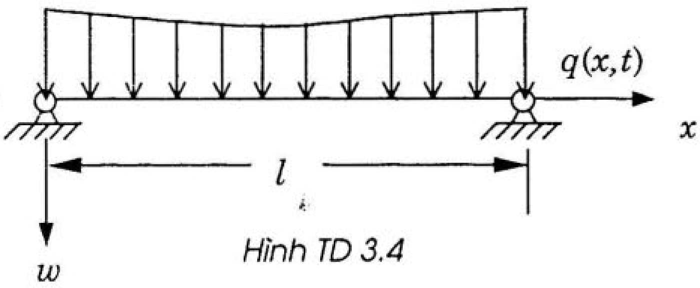
Phương trình (3.5) biểu thị dao động tắt dần.

3.1.2 *Dao động uốn cưỡng bức của dây*

Thí dụ 3.4 Viết phương trình vi phân dao động nhỏ của dây dưới tác dụng của tải trọng phân bố theo chiều dài là $q(x,t)$. Giả thiết sức căng dây S luôn không đổi.

Lời giải. Áp dụng nguyên lý d'Alembert cho một phân tố có chiều dài dx ta được:

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q(x,t) \quad (3.6)$$

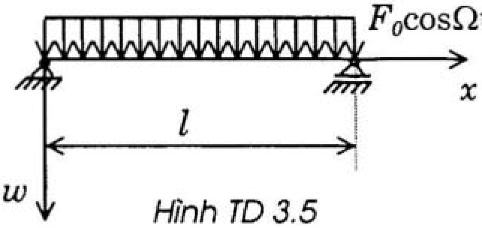


Hình TD 3.4

Thí dụ 3.5 Một sợi dây đồng chất được kéo căng giữ chặt ở hai đầu, chịu tác dụng một lực phân bố $F(t) = F_0 \cos\Omega t$ trên suốt chiều dài dây (xem hình vẽ). Xác định nghiệm bình ổn của dao động uốn của dây. Giả thiết sức căng dây S luôn không đổi.

Lời giải. Phương trình vi phân dao động của dây có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{F_0}{\mu} \cos\Omega t \quad (3.7)$$



Hình TD 3.5

Nghiệm bình ổn của (3.7) được tìm dưới dạng:

$$w(x,t) = X(x)\cos\Omega t \qquad (3.8)$$

Thay (3.8) vào (3.7):

$$X'' + \frac{\Omega^2}{c^2} X = -\frac{F_0}{\mu c^2} \Rightarrow X(x) = A\cos\frac{\Omega}{c}x + B\sin\frac{\Omega}{c}x - \frac{F_0}{\mu\Omega^2}$$

Với điều kiện biên:

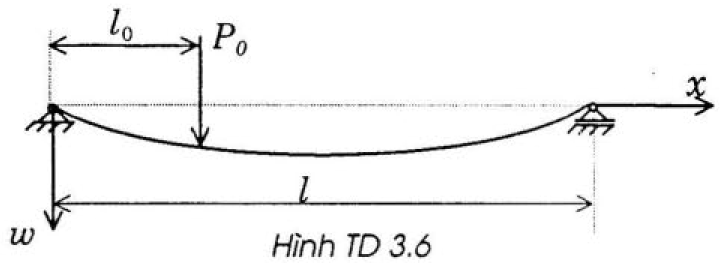
$$X(0) = 0 \Rightarrow A - \frac{F_0}{\mu\Omega^2} = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow A\cos\frac{\Omega}{c}l + B\sin\frac{\Omega}{c}l - \frac{F_0}{\mu\Omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{F_0}{\mu\Omega^2};\; B = \frac{F_0\left(1 - \cos\frac{\Omega l}{c}\right)}{\mu\Omega^2 \sin\frac{\Omega l}{c}} = \frac{F_0}{\mu\Omega^2} tg\frac{\Omega l}{2c}$$

Vậy: $$w(x,t) = \frac{F_0}{\mu\Omega^2}\left(\cos\frac{\Omega}{c}x + tg\frac{\Omega l}{2c}\sin\frac{\Omega}{c}x - 1\right)\cos\Omega t$$

Thí dụ 3.6 Tác dụng đột ngột một lực không đổi P_0 lên dây ở điểm cách nút trái một khoảng l_0 (hình vẽ) tại thời điểm $t = 0$. Tìm độ võng của dây theo thời gian ở điểm tác dụng lực. Giả thiết sức căng dây S luôn không đổi.



Hình TD 3.6

Lời giải. Phương trình vi phân dao động được viết dưới dạng:

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_0\delta(x - l_0) \tag{3.9}$$

δ là hàm Delta - Dirac [1]. Khai triển Fourier:

$$\delta(x - l_0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

trong đó: $$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x - l_0)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi l_0}{l}.$$

Phương trình (3.9) có dạng:

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2P_0}{l}\sin\frac{n\pi l_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.10}$$

Nghiệm phương trình (3.10) được tìm dưới dạng:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Thế biểu thức trên vào (3.10) ta được:

$$\ddot{T}_n + c^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T_n = \frac{2P_0}{l\mu}\sin\frac{n\pi l_0}{l}, \quad n = 1, 2, ...$$

Nghiệm phương trình trên với điều kiện đầu bằng 0 ($T_n^{(0)} = \dot{T}_n^{(0)} = 0$) có dạng:

$$T_n = \frac{2P_0 l}{Sn^2\pi^2}\sin\frac{n\pi l_0}{l}\left(1 - \cos\frac{n\pi c}{l}t\right).$$

Ta có nghiệm phương trình (3.9):

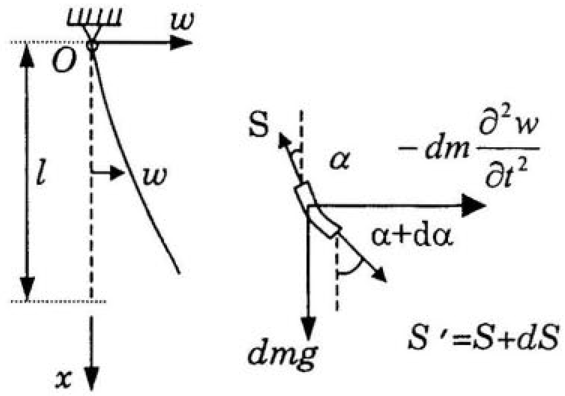
$$w(x,t) = \frac{2P_0 l}{S\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi l_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(1 - \cos\frac{n\pi c}{l}t\right).$$

Dịch chuyển của điểm đặt lực là hàm của thời gian:

$$w(l_0,t) = \frac{2P_0 l}{S\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{n\pi l_0}{l}\left(1 - \cos\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

3.1.3 *Các bài toán mở rộng*

Thí dụ 3.7 Cho một dây nặng đồng chất chiều dài l đầu O gắn chặt (hình vẽ) khối lượng đơn vị dài của dây là μ. Viết phương trình vi phân dao động uốn nhỏ tự do của dây đối với vị trí cân bằng thẳng đứng và tính ba tần số dao động riêng đầu tiên của dây.



Hình TD 3.7

Lời giải. Trong trường hợp này, lực căng dây biến thiên theo độ dài:

$$S = \mu g(l - x) \tag{3.11}$$

Xét một phân tố có chiều dài dx như hình TD 3.7. Các lực tác dụng cho trên hình. Chiếu các lực lên trục w ta có:

$$-dm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (S + dS).\sin(\alpha + d\alpha) - S\sin\alpha = 0$$

$$-\mu dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (S + \frac{\partial S}{\partial x}dx).(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx) - S\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(S.\alpha) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(l - x)\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Hay $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[g(l-x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] \tag{3.12}$$

Nghiệm của (3.12) được tìm dưới dạng:

$$w(x,t) = X(x)\sin(\omega t) \tag{3.13}$$

Thế (3.13) vào (3.12), sau vài phép biến đổi:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dX}{dx_1} + \frac{\omega^2}{gx_1}X = 0 \tag{3.14}$$

trong đó $x_1 = l - x$.

Nghiệm của phương trình (3.14) có dạng:

$$X = C_1J_0\left(2\sqrt{\frac{\omega^2}{g}x_1}\right) + C_2Y_0\left(2\sqrt{\frac{\omega^2}{g}x_1}\right) \tag{3.15}$$

trong đó J_0, Y_0 là các hàm Bessel loại một và loại hai cấp 0; C_1, C_2 là các hằng số

Hàm X phải thoả mãn các điều kiện biên sau:

$$x = 0 : x_1 = l, X(l) = 0 \tag{3.16}$$

$$x = l : x_1 = 0, X(0) \neq \infty \tag{3.17}$$

Vì $Y_0(0) = \infty$ nên $C_2=0$. Thay vào (3.16):

$$C_1J_0(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}) = 0 \qquad \Rightarrow J_0(2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}) = 0 \tag{3.18}$$

(3.18) là phương trình tần số.

Ba nghiệm đầu tiên của hàm J_0 là: k_1 =2,4 ; k_2 =5,52 ; k_3 =8,65 nên ta có

$$\omega_1 = 1,2\sqrt{\frac{g}{l}}; \qquad \omega_2 = 2,76\sqrt{\frac{g}{l}}; \qquad \omega_3 = 4,325\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Thí dụ 3.8 Lập phương trình vi phân dao động uốn nhỏ của dây nằm trên nền đàn hồi và tính các tần số riêng (hình TD 3.8.a). Khi dây lệch khỏi vị trí cân bằng, lực phục hồi tác dụng lên dây tỷ lệ với độ lệch dây theo hệ số *k*.

Lời giải. Xét một phân tố có chiều dài *dx* như hình TD 3.8.b.

Chiếu lên trục w

$$dm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -kwdx - S\sin\alpha + S\sin(\alpha + d\alpha)$$

$$\Rightarrow \mu dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -kwdx + S\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx \qquad (3.19)$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -kw + S\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Nghiệm của phương trình trên được tìm dưới dạng:

$$w = X(x)\sin\omega t \qquad (3.20)$$

Thay (3.20) vào (3.19) ta được

$$SX'' + \left(\mu\omega^2 - k\right)X = 0$$

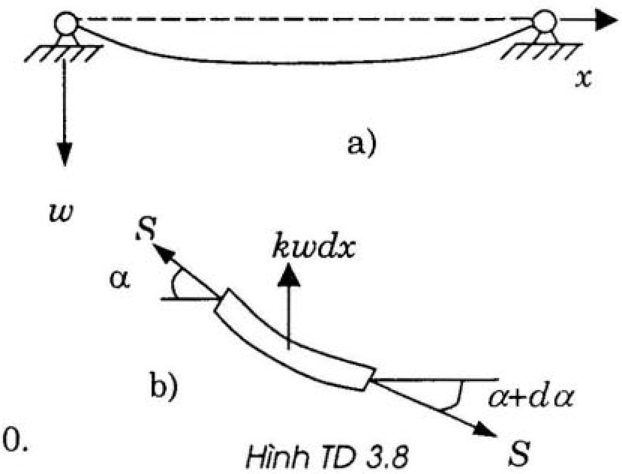
$$\Rightarrow X = C_1\cos\bar{\omega}x + C_2\sin\bar{\omega}x$$

với $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{1}{S}(\mu\omega^2 - k)}$.

Điều kiện biên:

$x = 0$: $X(0) = 0$ suy ra $C_1 = 0$

$x = l$: $X(l) = 0$ suy ra $C_2\sin\bar{\omega}l = 0$.



Hình TD 3.8

Từ đây ta được phương trình tần số: $\sin\left(\sqrt{\frac{\mu\omega^2 - k}{S}}\right)l = 0$

Nghiệm của phương trình trên là: $\left(\sqrt{\frac{\mu\omega^2 - k}{S}}\right)l = n\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$

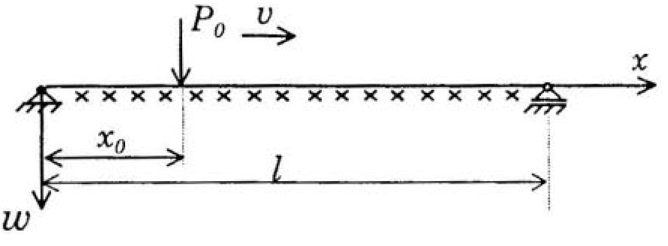
Ta có các tần số riêng: $\omega_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{\mu l^2}S + \frac{k}{\mu}} \qquad n = 1, 2, \ldots$

Thí dụ 3.9 Một tải trọng tập trung P_0 chuyển động với vận tốc không đổi v trên sợi dây đặt nằm trên nền đàn hồi tuyến tính (hình TD 3.9). Độ cứng của nền bằng k, lực căng trong dây bằng S, khối lượng đơn vị độ dài của dây bằng μ. Tính độ võng của dây, biết rằng ở thời điểm đầu tải trọng đặt ở gối trái.

Lời giải. Phương trình dao động uốn của dây có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{P_0}{\mu}\delta(x - x_0) - \frac{k}{\mu} w \tag{3.21}$$

trong đó: $c^2 = \dfrac{S}{\mu}$, $x_0 = vt$.



Hình TD 3.9

Khai triển Fourier:

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi x_0}{l} \sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi}{l} vt \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Lúc này (3.21) có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{k}{\mu} w + \frac{P_0}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi}{l} vt \, \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.22}$$

Tìm nghiệm (3.22) dưới dạng:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.23}$$

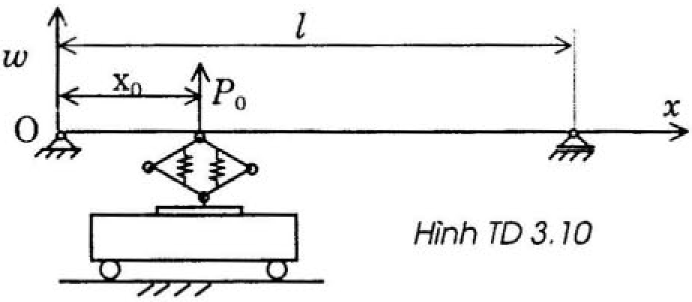
Thế (3.23) vào (3.22):

$$\ddot{T}_n + \left[c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{k}{\mu}\right] T_n = \frac{2P_0}{l\mu} \sin\frac{n\pi}{l} vt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vì khi t=0: $T_n = \dot{T}_n = 0$, nên sau khi biến đổi ta được

$$w(x,t) = \frac{2P_0 l}{\mu\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{n\pi v}{l} t - \dfrac{n\pi v}{\omega_n l} \sin\omega_n t}{n^2 \left[\omega_n^2 - \left(\dfrac{n\pi}{l} v\right)^2\right]} \sin\frac{n\pi x}{l} \text{ với } \omega_n = \sqrt{c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{k}{\mu}}.$$

Thí dụ 3.10 Hình TD 3.10 mô tả sơ đồ một đầu tàu điện chuyển động. Bộ phận lấy điện được đặt tỳ vào một sợi dây điện căng với lực không đổi P_0 và khi tàu chuyển động, nó trượt trên dây với vận tốc v không đổi. Tại thời điểm đầu, bộ lấy điện được đặt ở điểm gắn dây điện O. Khảo sát dao động của dây điện biết sức căng dây là S, khối lượng đơn vị độ dài là μ.



Hình TD 3.10

Lời giải. Ta có điểm đặt bộ lấy điện $x_0 = vt$ chịu tác dụng lực P_0 như hình vẽ. Phương trình mô tả dao động của dây (tham khảo TD 3.9) có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{P_0}{\mu}\delta\left(x - x_0\right) = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2P_0}{l\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi vt}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} \quad (3.24)$$

Nghiệm phương trình (3.24) được tìm dưới dạng:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \quad (3.25)$$

Thế (3.25) vào (3.24) ta được:

$$\ddot{T}_n + c^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n = \frac{2P_0}{l\mu}\sin\frac{n\pi}{l}vt \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vì khi $t = 0$: $T_n = \dot{T}_n = 0$, nên nghiệm của phương trình có dạng

$$T_n = \frac{2P_0}{l\mu}\frac{1}{\left(c^2 - v^2\right)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\left[\sin\frac{n\pi}{l}vt - \frac{v}{c}\sin\frac{n\pi}{l}ct\right].$$

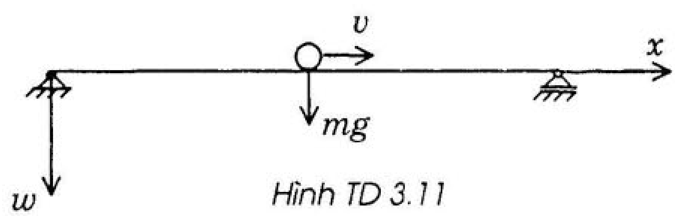
Thay vào (3.25):

$$w(x,t) = \frac{2P_0 l}{\mu\left(c^2 - v^2\right)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[\sin\frac{n\pi}{l}vt - \frac{v}{c}\sin\frac{n\pi}{l}ct\right].$$

Thí dụ 3.11 Hình vẽ mô tả một cabin trượt trên cáp treo là một khối lượng m chuyển động trên dây với vận tốc v không đổi. Lực căng của dây bằng S, khối lượng đơn vị dài của dây là μ.

1. Lập phương trình dao động uốn nhỏ của dây

2. Tìm dịch chuyển thẳng đứng của khối lượng nếu giả thiết lực quán tính $m\ddot{w}$ là không đáng kể so với trọng lượng mg.



Hình TD 3.11

Lời giải. 1. Trong trường hợp này lực tác dụng tại vị trí khối lượng lên dây là

$$N = mg - m\ddot{w}_0$$

với $w_0 = w(x_0, t)$ là độ võng của dây tại vị trí của khối lượng m ($x_0 = vt$).

Khi đó phương trình dao động uốn của dây có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{mg}{\mu}\delta(x - vt) - \frac{m}{\mu}\ddot{w}_0 \delta(x - vt) \tag{3.26}$$

Khai triển *Fourier*:

$$\delta(x - vt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi vt}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Nghiệm phương trình (3.26) được tìm dưới dạng:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}$$

Khi đó: $w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\dfrac{n\pi vt}{l}$

Sau vài phép biến đổi ta được:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[T_n + \frac{m}{\mu}\frac{2}{l} T_n \sin\frac{n\pi vt}{l}\right] + \omega_n^2 T_n = \frac{2mg}{\mu l}\sin\frac{n\pi vt}{l}$$

với: $\omega_n^2 = c^2 \left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$.

2. Trường hợp này giống thí dụ 3.10 khi thay $P_0 = mg$, ta được:

$$w(x,t)=\frac{2mgl}{\mu\pi^2(c^2-v^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\sin\frac{n\pi}{l}vt-\frac{v}{c}\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

Dịch chuyển thẳng đứng của khối lượng m bằng:

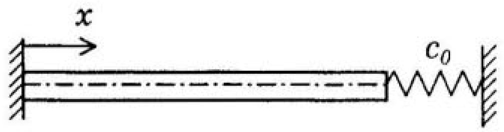
$$w|_{x=vt}=\frac{2mgl}{\mu\pi^2(c^2-v^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi vt}{l}\left(\sin\frac{n\pi}{l}vt-\frac{v}{c}\sin\frac{n\pi c}{l}t\right).$$

3.2 Dao động dọc và dao động xoắn của thanh thẳng

3.2.1 *Dao động dọc tự do*

Trong phần dưới đây, chúng ta sẽ khảo sát dao động dọc của thanh thẳng có chiều dài l, môđun đàn hồi E, diện tích tiết diện A, khối lượng phân bố theo đơn vị dài là μ, mật độ khối là ρ.

Thí dụ 3.12 Thiết lập phương trình tần số của thanh đồng chất có tiết diện không đổi có đầu trái ngàm, đầu phải chịu liên kết với lò xo có độ cứng c_0 như hình vẽ. Xác định hai tần số riêng đầu tiên nếu $c_0 = EA/l$.



Hình TD 3.12

Lời giải. Theo [1], phương trình dao động dọc của thanh thẳng đồng chất tiết diện không đổi là:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\quad;\quad c^2=\frac{E}{\rho}\tag{3.27}$$

Nghiệm dao động dọc được tìm dưới dạng $u(x,t) = X(x).T(t)$ và hàm riêng:

$$X(x)=A^*\cos\frac{\omega}{c}x+B\sin\frac{\omega}{c}x\tag{3.28}$$

Điều kiện biên:

$$x=0{:}\ X(0)=0\Rightarrow A^*=0\Rightarrow X(x)=B.\sin\frac{\omega}{c}x$$

$$x=l;\ EA\frac{\partial u}{\partial x}=-c_0u\quad\Rightarrow EA.X(l).T(t)\ =-c_0X(l).T(t)$$

$$\Rightarrow EA.X'(l) = c_0.X(l) \;\;\Rightarrow\;\; EA\frac{\omega}{c}B\cos\frac{\omega}{c}l = -c_0B.\sin\frac{\omega}{c}l$$

$$\Rightarrow\;\; tg\frac{\omega}{c}l = -\frac{EA.\omega}{c.c_0} \quad hay \quad tg\lambda = -\lambda\frac{EA}{c_0 l} \quad với \quad \lambda = \frac{\omega}{c}l \quad (3.29)$$

(3.29) là phương trình tần số của thanh

Nếu $c_0 = \dfrac{EA}{l}$ thì (3.29) có dạng tgλ = - λ

Từ đó, ta có nghiệm:

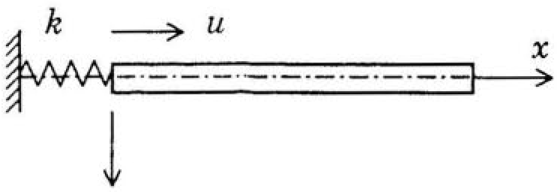
$$\lambda_1 \approx 2{,}15 \Rightarrow \omega_1 \approx \frac{2{,}15}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\lambda_2 \approx 4{,}85 \Rightarrow \omega_2 \approx \frac{4{,}85}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Thí dụ 3.13 Đầu trái của thanh đồng chất có tiết diện không đổi gắn với một lò xo có độ cứng k, đầu kia tự do.

1. Viết phương trình xác định tần số dao động

2. Xác định hai tần số đầu của thanh biết $k = EA/l$.



Hình TD 3.13

Lời giải. Áp dụng cách giải giống như thí dụ 3.12

Điều kiện biên:

$$\begin{cases} x = 0: \; \dfrac{\partial u}{\partial x}EA = ku \\ x = l: \; \dfrac{\partial u}{\partial x}EA = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta xác định được phương trình tần số:

$$tg\lambda = \frac{k}{\lambda\dfrac{EA}{l}} \qquad (3.30)$$

với tần số: $\omega = \lambda \frac{c}{l} = \lambda \frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Khi $k = \frac{EA}{l}$, biểu thức (3.30) có dạng $tg\lambda = \frac{1}{\lambda}$.

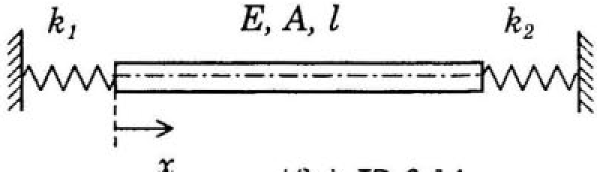
Giải phương trình trên bằng phương pháp số ta được: $\lambda_1 = 0,860$; $\lambda_2 = 3,425$.

Vậy tần số dao động riêng: $\omega_1 = \frac{0,86}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$; $\omega_2 = \frac{3,425}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Thí dụ 3.14 Cả 2 đầu thanh đều gắn lò xo như hình vẽ. Lập phương trình xác định tần số dao động của thanh. Tính hai tần số riêng đầu tiên khi $k_1 = 2k_2 = EA/l$.

Lời giải. Điều kiện biên

$$\begin{cases} x = 0; & \frac{\partial u}{\partial x}EA = k_1 u(0) \\ x = l; & \frac{\partial u}{\partial x}EA = -k_2 u(l) \end{cases}$$



Hình TD 3.14

Khi đó phương trình tần số có dạng:

$$tg\lambda = -\frac{\frac{\lambda}{l}EA(k_1 + k_2)}{k_1 k_2 - (\frac{EA}{l}\lambda)^2} \quad (3.31)$$

với $\lambda = \omega \frac{l}{c}$ *hay* $\omega = \frac{\lambda}{l}c = \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Khi $k_1 = 2k_2 = \frac{EA}{l}$ thì (3.31) có dạng:

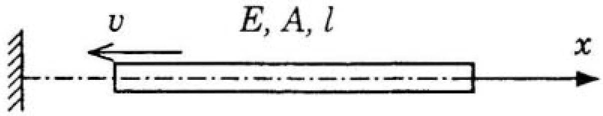
$$tg\lambda = \frac{3}{2}.\frac{\lambda}{\lambda^2 - 0,5}$$

ta tìm được nghiệm gần đúng λ_1=1,25; λ_2=3,5

Vậy tần số dao động riêng: $\omega_1 = 1,25\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$; $\omega_2 = 3,5\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Thí dụ 3.15 Một thanh đồng chất chuyển động dọc theo trục x với vận tốc v không đổi (hình vẽ). Thanh bị va chạm vào một vật chắn, rắn tuyệt đối sao cho từ đó trở đi mút trái của thanh luôn luôn gắn cứng vào vật rắn. Tính giá trị dịch chuyển cực đại ở đầu phải của thanh và giá trị ứng lực dọc trục cực đại ở đầu trái của thanh.

Lời giải.



Hình TD 3.15

Do điều kiện đầu

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -v \end{cases}$$

Ta tìm được nghiệm:

$$u(x,t) = -\frac{8vl}{\pi^2 c}\sum_{\substack{n=1\\(n\ \text{lẻ})}}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\sin\frac{n\pi x}{2l}.\sin\frac{n\pi c}{2l}t \quad \text{với} \quad c = \sqrt{\frac{EA}{\mu}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Dịch chuyển của biên phải (x=l) là

$$u(l,t) = -\frac{8vl}{\pi^2 c}\sum_{\substack{n=1\\n\ \text{lẻ}}}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2}.\sin\frac{n\pi c}{2l}t$$

Giá trị cực đại đạt ở thời điểm $t_1 = \dfrac{l}{c}$

$$u(l,t)_{\max} = -\frac{8vl}{\pi^2 c}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots\right) = -\frac{vl}{c}$$

Ta có lực dọc trục

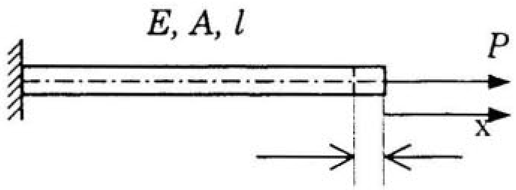
$$N = EA\frac{\partial u}{\partial x} = -EA\frac{8vl}{\pi^2 c}\sum_{\substack{n=1\\(n\ \text{lẻ})}}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(n\frac{\pi}{2l}\right)\cos\left(n\frac{\pi x}{2l}\right).\sin\left(n\frac{\pi c}{2l}t\right)$$

Tại vị trí biên trái (x=0), dễ thấy N đạt cực đại khi $t = \dfrac{l}{c}$

$$N_{\max} = -EA\frac{4vl}{\pi c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}(-1)^{n+1} = -\frac{vEA}{c} = -v\sqrt{EA\mu}$$

Thí dụ 3.16 Cho biết thanh bị kéo bởi một lực P không đổi và ở một thời điểm nhất định, lực được bỏ đi đột ngột (hình vẽ). Tìm quy luật dịch chuyển của đầu mút phải của thanh.

Lời giải. Do trạng thái kéo tĩnh, đầu mút phải của thanh giãn một đoạn $u_0 = \dfrac{Pl}{EA}$



Hình TD 3.16

Với điều kiện đầu:

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0 \dfrac{x}{l} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (3.32)$$

Do điều kiện biên: đầu trái ngàm, đầu phải tự do nên ta có phương trình tần số:

$$\cos\omega\frac{l}{c} = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{2n-1}{2}.\frac{\pi}{l}c$$

và $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{\omega_n}{c}x).\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)$$

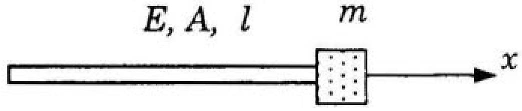
Do điều kiện đầu (3.32)

Vậy: $$u(x,t) = \frac{8u_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(\sin\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{l}\cdot x\right).\cos\left(\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{\pi}{l}ct\right)$$

Dịch chuyển mút phải của thanh

$$u(x,t) = \frac{8u_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{l}ct\right)$$

Thí dụ 3.17 Hãy xác định hàm riêng của dao động dọc của thanh đồng chất có chiều dài l mang khối lượng m ở một đầu còn đầu kia tự do.



Hình TD 3.17

Lời giải. Hàm riêng có dạng:

$$X(x) = A^* \cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}xl$$

Điều kiện biên: $x = 0: \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ (3.33)

$$x = l: \quad m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EA\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.34}$$

Từ (3.33) suy ra: $X(x) = A^{*}\cos\dfrac{\omega}{c}x$

Chú ý rằng: $\ddot{T} = -\omega^2 T$, điều kiện (3.34) có dạng:

$$m(-X|_{x=l}.\omega^2 T) = -EA(X'|_{x=l}.T)$$

Vậy:

$$-m\omega^2\left(A^{*}\cos\frac{\omega}{c}l\right).T = -EA\left(-\frac{\omega}{c}A^{*}\sin\frac{\omega}{c}l\right).T$$

$$\Rightarrow tg\frac{\omega}{c}l = \frac{-m\omega^2}{\dfrac{EA.\omega}{c}} = \frac{-m\omega}{\dfrac{EA}{c}} = -\frac{mc^2}{EA.l}\cdot\frac{\omega}{c}\cdot l = -\frac{m\dfrac{EA}{\mu}}{EA.l}\frac{\omega}{c}l$$

$$\Rightarrow tg\frac{\omega}{c}l = -\frac{m}{\mu l}\frac{\omega}{c}l$$

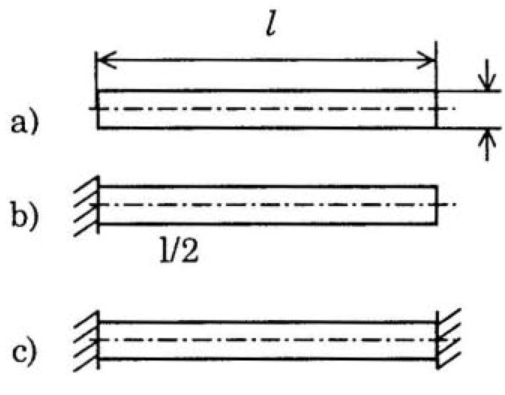
hay: $\quad tg\lambda = -\dfrac{m}{\mu l}\lambda \quad$ với $\lambda = \dfrac{\omega}{c}l$

Phương trình trên được gọi là phương trình tần số, từ đây ta giải ra các tần số riêng ω_n. Khi đó ta được hàm riêng $X_n(x) = A_n.\cos\dfrac{\omega_n}{c}x$.

3.2.2 *Dao động xoắn tự do*

Đối với dao động xoắn của thanh thẳng chúng ta quan tâm đến các môđun cắt vật liệu G, mật độ khối ρ, mômen quán tính xoắn I_x, mômen quán tính thiết diện I_p. Chú ý rằng đối với trục (tiết diện tròn) ta có $I_x = I_p$

Thí dụ 3.18 Tính các tần số riêng và hàm riêng của dao động xoắn của trục được cho trên hình *a, b, c*. Trục có tiết diện tròn, mật độ ρ và môđun cắt vật liệu *G*.



Hình TD 3.18

Lời giải. Phương trình dao động xoắn tự do:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

với: $$c^2 = \frac{GI_x}{\rho I_p} = \frac{G}{\rho}$$

Nghiệm của phương trình có dạng:

$$\varphi(x,t) = X(x).T(t)$$

với: $$X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x$$

Các hằng số A, B được xác định từ điều kiện biên

Điều kiện ngàm: $\varphi = 0 \Rightarrow X = 0$

Điều kiện biên tự do: $0 = M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} GI_p \Rightarrow X' = 0$

a) $$X'(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow \sin\frac{\omega}{c}l = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{c}{l}n\pi$$

Vậy hàm riêng $X_n = A_n \cos\frac{\omega_n}{c}x = A_n \cos\frac{n\pi}{l}x$

b) $$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X(x) = B.\sin\frac{\omega}{c}x$$

$$X'(l) = 0 \Rightarrow \cos\frac{\omega}{c}l = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{c}{l}\cdot\frac{2n-1}{2}\pi$$

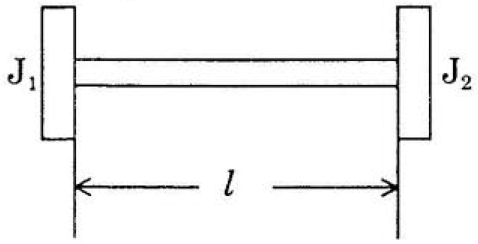
Vậy hàm riêng $X_n = B_n \sin\frac{\omega_n}{c}x = B_n \sin\frac{2n-1}{2l}\pi x$

c) $$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X(x) = B\sin\frac{\omega}{c}x$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow \sin\frac{\omega}{c}l = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{c}{l}n\pi$$

Vậy hàm riêng $X_n = B_n \sin\frac{\omega_n}{c}x = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$.

Thí dụ 3.19 Xác định tần số dao động riêng của trục có tiết diện ngang tròn mang 2 đĩa ở đầu (hình TD 3.19). Cho biết mômen quán tính của đĩa bằng J_1, J_2 trục có mật độ khối ρ và mômen quán tính cực của tiết diện I_P



Hình TD 3.19

Lời giải. Phương trình dao động tự do:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \text{ (với } c^2 = \frac{G}{\rho}\text{)}$$

Nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$\varphi(x,t) = X(x).\sin(\omega t) \text{ với } X(x) = A\cos\frac{\omega}{c}x + B\sin\frac{\omega}{c}x$$

Với điều kiện biên:

$$\begin{cases} GI_p\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = J_1\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{x=0} \\ GI_p\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=l} = -J_2\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{x=l} \end{cases}$$

ta nhận được phương trình:

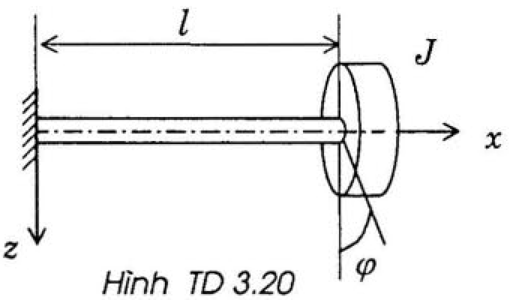
$$\begin{cases}\left(GI_p\dfrac{\omega}{c}\right).B+\left(J_1\omega^2\right)A=0\\ \left(GI_p\dfrac{\omega}{c}\cos\beta-J_2\omega^2\sin\beta\right).B-\left(GI_p\dfrac{\omega}{c}\sin\beta+J_2\omega^2\cos\beta\right).A=0\end{cases}$$

với: $\beta=\dfrac{\omega}{c}l$.

Điều kiện để hệ phương trình trên có nghiệm không tầm thường là định thức của nó triệt tiêu. Từ đó, ta được phương trình xác định tần số riêng:

$$tg\beta=\frac{(k_1+k_2)\beta}{(k_1k_2\beta^2-1)}\ \text{với}\ k_1=\frac{J_1}{J_0},k_2=\frac{J_2}{J_0},J_0=\rho lI_p$$

Thí dụ 3.20 Một đĩa có mômen quán tính đối với trục x là J được gắn cứng vào đầu tự do của một trục đồng chất, thiết diện không đổi dài l (hình TD 3.20). Xác định phương trình tần số dao động xoắn của trục.



Hình TD 3.20

Lời giải. Phương trình dao động xoắn tự do của trục

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\ (\text{với}\ c^2=\frac{G}{\rho})$$

Điều kiện biên:

$$x=0:\varphi(0,t)=0$$

$$x=l:\ M_x=M_{qt}\Rightarrow GI_p\frac{\partial\varphi}{\partial x}(l,t)=-J\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

Nghiệm được tìm dưới dạng $\varphi(x,t)=X(x).T(t)$

rút ra: $$\begin{cases}\ddot{T}=-\omega^2T\\ X''+\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2X=0\Rightarrow X=A\cos\dfrac{\omega}{c}x+B\sin\dfrac{\omega}{c}x\end{cases}$$

ta tìm A, B từ điều kiện biên

$$x=0:X(0)=0\Rightarrow A=0\Rightarrow X(x)=B.\sin\frac{\omega}{c}x$$

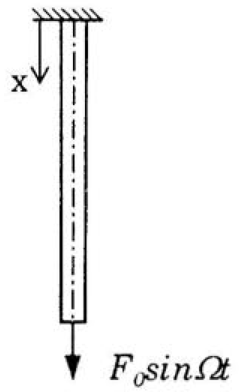
$$x=l:G.I_pX'(l).T=-J.X(l).\ddot{T}=J.X(l).\omega^2.T\Rightarrow G.I_pX'(l)=\omega^2J.X(l)$$

$$\Rightarrow G.I_p.B\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}l = \omega^2 J.B\sin\frac{\omega}{c}l \Rightarrow tg\frac{\omega}{c}l = \frac{GI_p}{c.\omega.J}$$

$$\Rightarrow \lambda.tg\lambda = \frac{G.I_p.l}{c^2 J} = \frac{I_p.l.\rho}{J} \quad \text{với } \lambda = \frac{\omega}{c}l$$

3.2.3 *Dao động dọc cưỡng bức*

Thí dụ 3.21 Xác định dao động dọc cưỡng bức của thanh một đầu ngàm chặt, ở đầu kia chịu tác dụng của lực $F(t)=F_0\sin(\Omega t)$ (hình TD 3.21).



Hình TD 3.21

Lời giải. Phương trình dao động dọc của thanh có dạng

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nghiệm cưỡng bức của bài toán được tìm dưới dạng

$$u^*(x,t) = X^*(x)\sin\Omega t$$

Thay vào phương trình trên ta được

$$X^{*''} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 X^* = 0$$

$$\Rightarrow X^* = B_1\cos\frac{\Omega}{c}x + B_2\sin\frac{\Omega}{c}x$$

Vậy: $$u^*(x,t) = \left(B_1\cos\frac{\Omega}{c}x + B_2\sin\frac{\Omega}{c}x\right)\sin\Omega t$$

Do điều kiện biên không thuần nhất

$$x = 0: \quad u(0,t) = 0$$

$$x = l: \quad EA\frac{\partial u}{\partial x} = F_0\sin\Omega t$$

ta nhận được $B_1 = 0$; $\quad B_2 = \dfrac{F_0 c}{EA\Omega}\cdot\dfrac{1}{\cos\frac{\Omega}{c}l}$

Vậy dao động dọc cưỡng bức của thanh có dạng:

$$u^{*}(x,t)=\frac{F_0 c}{EA\Omega\cdot\cos\frac{\Omega}{c}l}\sin\frac{\Omega}{c}x.\sin\Omega t.$$

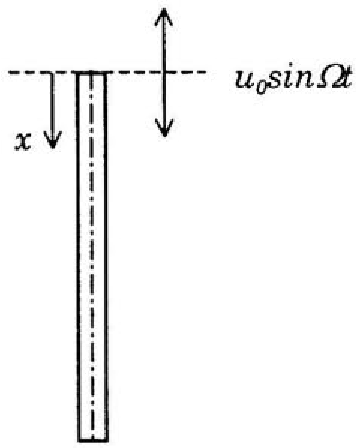
Thí dụ 3.22 Một thanh có một đầu tự do, một đầu chịu kích động động học theo luật $u=u_0 sin(\Omega t)$ như hình TD 3.22. Xác định dao động dọc bình ổn của thanh.

Lời giải. Phương trình dao động dọc của thanh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};c^2=\frac{E}{\rho} \qquad (3.35)$$

với các điều kiện biên:

$$\begin{cases} x=0: & u(0,t)=u_0\sin\Omega t \\ x=l: & \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0 \end{cases} \qquad (3.36)$$



Hình TD 3.22

Ta tìm nghiệm bình ổn dưới dạng:

$$u(x,t)=X(x).\sin\Omega t \qquad (3.37)$$

Thế (3.37) vào (3.35):

$$X''+\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 X=0$$

nghiệm có dạng $X(x)=B_1\cos\frac{\Omega}{c}x+B_2\sin\frac{\Omega}{c}x$

Vậy nghiệm của (3.35) có dạng:

$$u(x,t)=\left(B_1\cos\frac{\Omega}{c}x+B_2\sin\frac{\Omega}{c}x\right)\sin\Omega t$$

Thay vào điều kiện biên (3.36) ta được

$$B_1=u_0 \quad B_2=\left(tg\frac{\Omega}{c}l\right)u_0$$

Vậy: $$u(x,t)=u_0\left[\cos\frac{\Omega}{c}x+tg\frac{\Omega}{c}l.\sin\frac{\Omega}{c}x\right]\sin\Omega t \qquad (3.38)$$

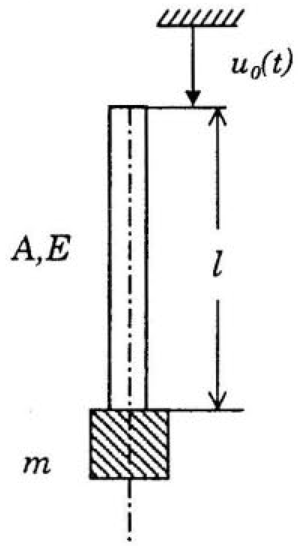
Chú ý rằng trường hợp cộng hưởng xảy ra khi $tg\frac{\Omega}{c}l = \infty$

hay $\Omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{l} \qquad k = 1,2,....$

Thí dụ 3.23 Một thanh có đầu dưới mang khối lượng m, đầu trên dịch chuyển theo phương thẳng đứng với luật $u_0 = U\sin\Omega t$. Hãy tìm dao động dọc bình ổn của thanh và biên độ dao động dọc của khối lượng m.

Lời giải. Nghiệm bình ổn dao động dọc của thanh được tìm dưới dạng:

$$u(x,t) = \left[C_1\cos\frac{\Omega}{c}x + C_2\sin\frac{\Omega}{c}x\right].\sin\Omega t$$



Hình TD 3.23

Điều kiện biên của bài toán:

$$\begin{cases} x = 0: & u = u_0(t) = U\sin\Omega t \\ x = l: & m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EA\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

Từ đây rút ra:

$$\begin{cases} C_1 = U \\ C_2 = U\dfrac{\dfrac{m}{\mu l}\alpha\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \dfrac{m}{\mu l}\alpha\sin\alpha} \end{cases} \qquad \text{với } \alpha = \Omega l/c$$

Vậy: $$u(x,t) = \frac{\cos\dfrac{\Omega}{c}(l-x) - \dfrac{m}{\mu l}\sin\dfrac{\Omega}{c}(l-x)}{\cos\alpha - \dfrac{m}{\mu l}\alpha\sin\alpha}U\sin\Omega t$$

Biên độ dao động dọc của khối lượng m:

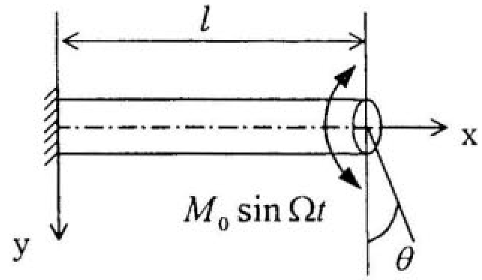
$$\overline{u}(l,t) = \frac{U}{\cos\alpha - \dfrac{m}{\mu l}\alpha\sin\alpha}$$

3.2.4 Dao động xoắn cưỡng bức

Thí dụ 3.24 Một trục đồng chất thiết diện không đổi, chiều dài l, một đầu bị ngàm chặt. Đầu tự do chịu tác dụng ngẫu lực có mômen là $M(t) = M_0 \sin\Omega t$. Hãy xác định dao động xoắn bình ổn của trục. Tìm góc xoắn cực đại ở mặt cắt $x = \frac{l}{2}$.

Lời giải. Phương trình dao động xoắn tự do của trục:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \quad (\text{với } c^2 = \frac{G}{\rho})$$



Hình TD 3.24

Ta tìm nghiệm bình ổn dưới dạng:

$$\varphi(x,t) = X(x).\sin\Omega t$$

Thay vào phương trình đầu ta được:

$$X'' + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos\frac{\Omega}{c}x + B\sin\frac{\Omega}{c}x$$

Điều kiện biên:

$$x = 0: X(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow X(x) = B.\sin\frac{\Omega}{c}x$$

$$x = l: \ M_x = GI_d\frac{\partial\varphi}{\partial x}(l,t) = M = M_0.\sin\Omega t$$

$$\Rightarrow G.I_d X'(l).\sin\Omega t = M_0\sin\Omega t \Rightarrow GI_p B\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l = M_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{M_0}{GI_d\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l}$$

Vậy nghiệm bình ổn của dao động xoắn có dạng:

$$\varphi(x,t) = \frac{M_0}{GI_d\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l}\sin\frac{\Omega}{c}x.\sin\Omega t$$

Tại mặt cắt $x = \frac{l}{2}$, biểu thức dao động xoắn bình ổn có dạng:

$$\varphi\left(\frac{l}{2},t\right)=\frac{M_0}{GI_d\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l}\sin\frac{\Omega l}{2c}.\sin\Omega t$$

Khi $\sin\Omega t = 1$ thì $\varphi(\frac{l}{2},t)$ đạt cực đại. Vậy ta có:

$$\varphi_{max}\left(\frac{l}{2},t\right)=\frac{M_0}{GI_d\frac{\Omega}{c}\cos\frac{\Omega}{c}l}\sin\frac{\Omega l}{2c}$$

3.2.5 *Một số bài toán mở rộng*

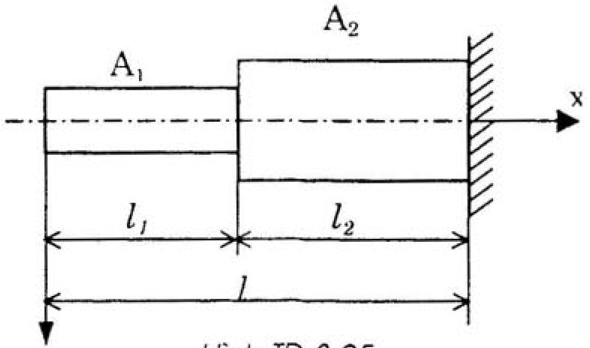
Thí dụ 3.25 Cho một trục đồng chất hai bậc như hình TD 3.25. Bậc i (i=1, 2) có chiều dài l_i, diện tích tiết diện A_i. Lập phương trình để xác định tần số dao động dọc của trục.

Lời giải. Nghiệm của phương trình dao động dọc tự do được tìm dưới dạng:

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

Trục gồm hai đoạn, ta gọi đoạn 1: $x\in[0,l_1]$; đoạn 2: $x\in[l_1, l]$.

Trên mỗi đoạn ta có hàm riêng:



Hình TD 3.25

$$X_i(x) = B_i\cos\frac{\omega}{c}x + D_i\sin\frac{\omega}{c}x \qquad i = 1,2$$

và lực dọc $N = A_iE\frac{\partial u}{\partial x}$ với $x\in$ đoạn i

$$N = A_iE\frac{\omega}{c}\left[-B_i\sin\frac{\omega}{c}x + D_i\cos\frac{\omega}{c}x\right].T(t)$$

ở đoạn thứ nhất: $x\in[0, l_1]$:

$$x = 0:\quad N = 0 \;\Rightarrow\; D_1 = 0 \Rightarrow X = B_1\cos\frac{\omega}{c}x$$

$$x = l_1 : \begin{cases} u(l_1) = B_1\left(\cos\dfrac{\omega}{c}l_1\right)T(t) \\ N(l_1) = -A_1E\dfrac{\omega}{c}B_1\left(\sin\dfrac{\omega}{c}l_1\right)T(t) \end{cases} \tag{3.39}$$

ở đoạn thứ hai: $x \in [l_1, l]$

$$x = l_1 : \begin{cases} u(l_1) = \left[B_2\cos\dfrac{\omega}{c}l_1 + D_2\sin\dfrac{\omega}{c}l_1\right]T(t) \\ N(l_1) = A_2E\dfrac{\omega}{c}\left[-B_2\sin\dfrac{\omega}{c}l_1 + D_2\cos\dfrac{\omega}{c}l_1\right]T(t) \end{cases} \tag{3.40}$$

Từ (3.39) và (3.40) ta có

$$\begin{cases} B_1\cos\dfrac{\omega}{c}l_1 = B_2\cos\dfrac{\omega}{c}l_1 + D_2\sin\dfrac{\omega}{c}l_1 \\ -\dfrac{A_1}{A_2}B_1\sin\dfrac{\omega}{c}l_1 = -B_2\sin\dfrac{\omega}{c}l_1 + D_2\cos\dfrac{\omega}{c}l_1 \end{cases} \tag{3.41}$$

$$\Rightarrow \qquad B_2 = B_1\left(\cos^2\frac{\omega}{c}l_1 + \frac{A_1}{A_2}\sin^2\frac{\omega}{c}l_1\right)$$

$$D_2 = B_1\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)\cos\frac{\omega}{c}l_1 . \sin\frac{\omega}{c}l_1$$

$$x = l_2 : \quad u(l_2) = \left(B_2\cos\frac{\omega}{c}l_2 + D_2\sin\frac{\omega}{c}l_2\right) = 0$$

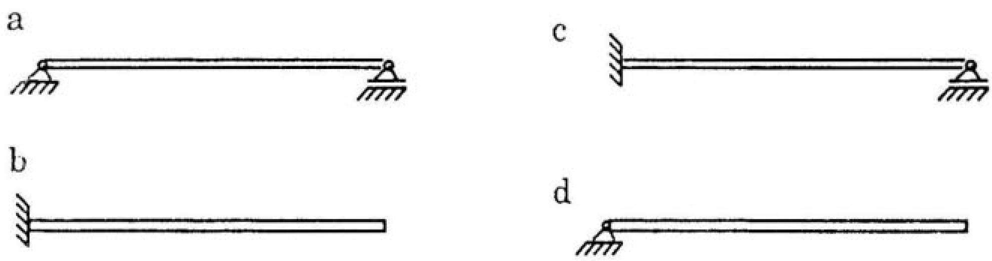
$$\Rightarrow B_1\left[\left(\cos^2\frac{\omega}{c}l_1 + \frac{A_1}{A_2}\sin^2\frac{\omega}{c}l_1\right)\cos\frac{\omega}{c}l_2 + \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)\cos\frac{\omega}{c}l_1 . \sin\frac{\omega}{c}l_1 . \sin\frac{\omega}{c}l_2\right] = 0$$

Vậy phương trình tần số: $\dfrac{A_1}{A_2}tg\left(\dfrac{\omega}{c}l_1\right) = cotg\dfrac{\omega}{c}(l_2 - l_1)$ (3.42)

3.3 Dao động uốn của dầm Euler-Bernoulli

3.3.1 *Dao động uốn tự do của dầm*

Thí dụ 3.26 Thiết lập phương trình vi phân uốn tự do của dầm và xác định các tần số riêng đối với các mô hình trên hình vẽ. Cho biết dầm đồng chất có tiết diện không đổi, độ cứng chống uốn EI, khối lượng đơn vị dài là μ.



Hình TD 3.26

Lời giải. Áp dụng nguyên lý d'Alembert cho một phân tố dx của dầm đồng chất, tiết diện không đổi, ta nhận được phương trình dao động uốn tự do:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\mu}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.43}$$

Theo phương pháp Bernoulli, ta tìm nghiệm (3.43) dưới dạng:

$$w(x,t) = X(x).T(t) \tag{3.44}$$

Thay (3.44) vào (3.43) ta được phương trình:

$$X^{(IV)}(x) - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 X(x) = 0 \tag{3.45}$$

$$\text{với } \lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI} l^4 \text{ hay } \omega = \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \tag{3.46}$$

Nghiệm (3.45) có dạng:

$$X(x) = C_1 \cos\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_2 \sin\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_3 \cosh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) + C_4 \sinh\left(\lambda\frac{x}{l}\right) \tag{3.47}$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 và λ được xác định từ điều kiện biên.

Chú ý: Với các điều kiện biên thông thường:

+ Gối tựa bản lề: độ võng và mô men uốn đều bằng không

$$\Rightarrow \qquad X = 0, X'' = 0$$

+ Ngàm chặt: độ võng và góc xoay đều bằng không $\Rightarrow X = 0, X' = 0$

+ Tự do: mô men uốn và lực cắt đều bằng không $\Rightarrow X'' = 0, X^{(3)} = 0$

Bây giờ, ta hãy xét một số dạng liên kết hay gặp

a) *Hai đầu chịu liên kết bản lề:*

$$\begin{aligned}
X(0) &= C_1 + C_3 = 0\\
X''(0) &= -C_1 + C_3 = 0\\
X(l) &= C_1\cos\lambda + C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda = 0\\
X''(l) &= -C_1\cos\lambda - C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda = 0
\end{aligned}$$

Từ hệ phương trình trên rút ra: $C_1 = C_4 = C_3 = 0$ và $C_2\sin\lambda = 0$

Để có nghiệm không tầm thường ($C_2 \neq 0$) ta được: $\sin\lambda = 0$

Đây chính là phương trình tần số, nghiệm của nó là với: $\lambda_k = k\pi$

hay các tần số riêng: $\omega_k = \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\dfrac{EI}{\mu}}$ k=1, 2...

b) *Đầu trái ngàm, đầu phải tự do:*

$$\begin{aligned}
X(0) &= C_1 + C_3 = 0\\
X'(0) &= C_2 + C_4 = 0\\
X''(l) &= -C_1\cos\lambda - C_2\sin\lambda + C_3\cosh\lambda + C_4\sinh\lambda = 0\\
X^{(3)}(l) &= C_1\sin\lambda - C_2\cos\lambda + C_3\sinh\lambda + C_4\cosh\lambda = 0
\end{aligned}$$

Từ đây rút ra $C_3 = -C_1$; $C_4 = -C_2$ và:

$$\begin{cases} C_1(\cos\lambda + \cosh\lambda) + C_2(\sin\lambda + \sinh\lambda) = 0\\ C_1(\sin\lambda - \sinh\lambda) - C_2(\cos\lambda + \cosh\lambda) = 0\end{cases}$$

Để có nghiệm không tầm thường $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, định thức của hệ phương trình trên phải bằng không:

$$\begin{vmatrix} (\cos\lambda + \cosh\lambda) & (\sin\lambda + \sinh\lambda) \\ (\sin\lambda - \sinh\lambda) & -(\cos\lambda + \cosh\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Từ đây ta nhận được phương trình tần số: $\cos\lambda . \cosh\lambda + 1 = 0$

c) *Đầu trái ngàm, đầu phải gối bản lề:*

$$\begin{aligned}
X(0) &= C_1 && && +C_3 && && = 0\\
X'(0) &= && C_2 && && +C_4 && = 0\\
X(l) &= C_1\cos\lambda && +C_2\sin\lambda && +C_3\cosh\lambda && +C_4\sinh\lambda && = 0\\
X''(l) &= -C_1\cos\lambda && -C_2\sin\lambda && +C_3\cosh\lambda && +C_4\sinh\lambda && = 0
\end{aligned}$$

Từ đây rút ra $C_3 = -C_1$; $C_4 = -C_2$ và

$$\begin{cases} C_1(\cos\lambda - \cosh\lambda) + C_2(\sin\lambda - \sinh\lambda) = 0 \\ -C_1(\cos\lambda + \cosh\lambda) - C_2(\sin\lambda + \sinh\lambda) = 0 \end{cases}$$

Để có nghiệm không tầm thường $(C_1^2 + C_2^2 \neq 0)$, ta có:

$$\begin{vmatrix} (\cos\lambda - \cosh\lambda) & (\sin\lambda - \sinh\lambda) \\ (\cos\lambda + \cosh\lambda) & (\sin\lambda + \sinh\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Từ đây ta nhận được phương trình tần số: $tg\lambda - tgh\lambda = 0$

d) Đầu trái bản lề, đầu phải tự do:

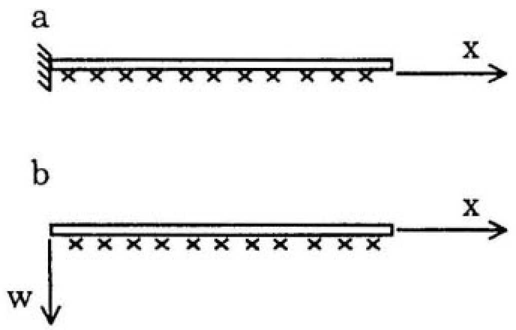
$$\begin{aligned}
X(0) &= C_1 && && +C_3 && && = 0\\
X''(0) &= -C_1 && && +C_3 && && = 0\\
X''(l) &= -C_1\cos\lambda && -C_2\sin\lambda && +C_3\cosh\lambda && +C_4\sinh\lambda && = 0\\
X^{(3)}(l) &= C_1\sin\lambda && -C_2\cos\lambda && +C_3\sinh\lambda && +C_4\cosh\lambda && = 0
\end{aligned}$$

Từ hệ phương trình trên rút ra $C_1 = C_3 = 0$ và:

$$\begin{cases} -C_2\sin\lambda + C_4\sinh\lambda = 0 \\ -C_2\cos\lambda + C_4\cosh\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\sin\lambda & \sinh\lambda \\ -\cos\lambda & \cosh\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{phương trình tần số: } tg\lambda - tgh\lambda = 0.$$

Thí dụ 3.27 Thiết lập phương trình dao động tự do của dầm đàn hồi nằm trên nền đàn hồi (hình TD 3.27). Biết rằng phản lực của nền tác dụng lên mỗi đơn vị chiều dài của dầm tỷ lệ bậc nhất với độ võng của dầm là kw (k là hệ số độ cứng của nền). Hãy tìm tần số riêng cho hai trường hợp sau:



Hình TD 3.27

Lời giải. Phương trình dao động tự do của dầm có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{k}{\mu} w = 0 \tag{3.48}$$

Nghiệm của nó được tìm dưới dạng: $w = X(x)\sin\omega t$

Từ đó ta được phương trình: $X^{(IV)} - \left(\frac{\lambda}{l}\right)^4 X = 0$

với $\quad \lambda^4 = \left(\omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)\frac{\mu}{EI} l^4 \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\lambda^4}{l^4}\frac{EI}{\mu} + \frac{k}{\mu}}$

a) Do điều kiện biên

x=0: $X = X' = 0$

x=l: $X'' = X^{(3)} = 0$

Nên ta nhận được phương trình tần số: $\cos\lambda.\cosh\lambda + 1 = 0$

Từ đây tìm được: $\lambda_1 \approx 1{,}875$; $\lambda_2 \approx 4{,}694$

$$\lambda_n \approx \frac{2n-1}{2}\pi \quad \text{với } n \geq 3$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{(1,875)^4}{l^4}\frac{EI}{\mu} + \frac{k}{\mu}}\,;\omega_2 = \sqrt{\frac{(4,694)^4}{l^4}\frac{EI}{\mu} + \frac{k}{\mu}}\,;$$

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^4 \frac{EI}{\mu l^4} + \frac{k}{\mu}} \quad \text{với n } \geq 3.$$

b) Do điều kiện biên x=0 và x=l: $X'' = X^{(3)} = 0$

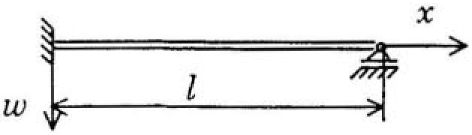
nên ta có phương trình tần số: $\cos\lambda.\cosh\lambda - 1=0$

Từ đây tìm được: $\lambda_1=0$; $\lambda_2=4,73$; $\lambda_3=7,85$

$$\Rightarrow \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}\,;\ \omega_2 = \sqrt{\frac{(4,73)^4}{l^4}\frac{EI}{\mu} + \frac{k}{\mu}}\,;\ \omega_2 = \sqrt{\frac{(7,85)^4}{l^4}\frac{EI}{\mu} + \frac{k}{\mu}}$$

Thí dụ 3.28 Cho dầm đồng chất, tiết diện không đổi như hình TD 3.28. Hãy chứng minh các dạng dao động riêng của dầm trực giao nhau.

Lời giải. Từ (3.45) ta rút ra:



Hình TD 3.28

$$X_i^{(IV)} = \frac{\lambda_i^4}{l^4}X_i(x)$$

$$X_k^{(IV)} = \frac{\lambda_k^4}{l^4}X_k(x)$$

Nhân lần lượt phương trình thứ nhất với $X_k(x)$, phương trình thứ hai với $X_i(x)$, trừ đi cho nhau rồi lấy tích phân theo x từ 0 đến l, ta được

$$\frac{\lambda_i^4 - \lambda_k^4}{l^4}\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = \int_0^l \left(X_k X_i^{(IV)} - X_i X_k^{(IV)}\right)dx$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần đối với vế phải, ta có:

$$\frac{\lambda_i^4 - \lambda_k^4}{l^4}\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = \left[X_k X_i^{(3)} - X_i X_k^{(3)} - X_k' X_i'' + X_i' X_k''\right]\Big|_0^l \quad (3.49)$$

Đối với dầm như hình vẽ, ta có điều kiện biên:

$x = 0$ (ngàm): $\quad X_i(0) = 0, X_k(0) = 0$

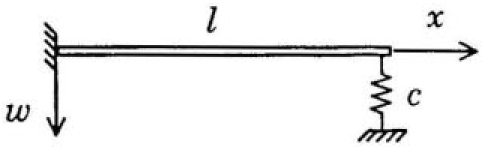
$$X_i'(0) = 0, X_k'(0) = 0$$

$x = l$ (bản lề): $\quad X_i(l) = 0, X_k(l) = 0$

$$X_i''(l) = 0, X_k''(l) = 0$$

Thay vào (3.49) ta được $\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = 0$ khi $i \neq k$. Vậy các hàm riêng trực giao với nhau.

Thí dụ 3.29 Hãy chứng minh tính chất trực giao của các hàm riêng của dầm cho trên hình TD 3.29.



Hình TD 3.29

Lời giải. Điều kiện biên:

x=0 (ngàm):

$$X_i(0) = 0,\ X_k(0) = 0,$$

$$X_i'(0) = 0, X_k'(0) = 0.$$

x=l (tựa trên lò xo):

$$M(l,t) = 0 \Rightarrow X_i''(l) = 0, X_k''(l) = 0$$

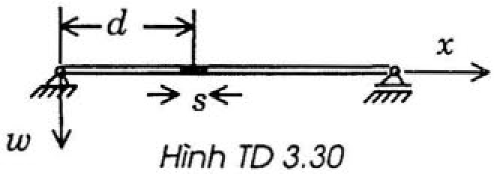
lực cắt $\quad Q$=$F_{dh} \Rightarrow EI\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} = cw \Rightarrow X_i'''(l) = \dfrac{c}{EI}X_i(l); X_k'''(l) = \dfrac{c}{EI}X_k(l)$

Thay các điều kiện trên vào (3.49) ta được:

$$\frac{\lambda_i^4 - \lambda_k^4}{l^4}\int_0^l X_i(x)X_k(x)dx = \left[X_k(l)\frac{c}{EI}X_i(l) - X_i(l)\frac{c}{EI}X_k(l) - 0 + 0\right] - 0 = 0$$

Vậy các hàm riêng trực giao với nhau.

Thí dụ 3.30 Một dầm đơn giản chiều dài l như hình TD 3.30. Tại thời điểm t=0, ta gõ đột ngột nhát búa vào vị trí x=d, xem rằng nó tạo ra vận tốc v_0 chỉ trên khoảng $\left[d - \frac{s}{2}, d + \frac{s}{2}\right]$, đoạn còn lại coi như không chịu tác dụng. Tìm dao động uốn của dầm.



Hình TD 3.30

Lời giải. Nghiệm tổng quát có dạng

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\frac{\pi x}{l}\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)$$

với $\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

Điều kiện đầu t=0:

$$w(x,0) = 0 \Rightarrow A_n = 0\ (\forall n) \Rightarrow w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\frac{\pi x}{l} \sin \omega_n t$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} v_0 & x \in \left[d - \frac{s}{2}, d + \frac{s}{2}\right] \\ 0 & x \notin \left[d - \frac{s}{2}, d + \frac{s}{2}\right] \end{cases}$$

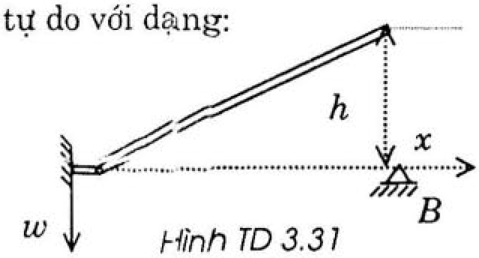
$$\Rightarrow \quad \int_0^l \omega_n B_n \sin^2 n\frac{\pi x}{l} dx = \int_{d-\frac{s}{2}}^{d+\frac{s}{2}} v_0 \sin n\frac{\pi x}{l} dx = -\frac{v_0 l}{n\pi} \cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{d-\frac{s}{2}}^{d+\frac{s}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad B_n = \frac{4v_0 l}{n\pi l\omega_n} \sin\frac{n\pi d}{l} \sin\frac{n\pi s}{2l}$$

$$\Rightarrow \quad w(x,t) = \frac{4v_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} \sin\frac{n\pi d}{l} \sin\frac{n\pi s}{2l} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin \omega_n t\ .$$

Thí dụ 3.31 Một dầm đơn giản chiều dài l, một đầu gắn chốt bản lề, một đầu tự do ở vị trí như hình TD 3.31. Nếu dầm quay như là một vật rắn đến khi chạm vào gối cố định B (không tiêu hao năng lượng) và sau đó không rời khỏi gối B. Hãy tìm dao động tự do của dầm.

Lời giải. Sau khi va chạm, dầm dao động tự do với dạng:



Hình TD 3.31

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\frac{\pi x}{l}\left(A_k \cos\omega_k t + B_k \sin\omega_k t\right)$$

với $\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

Điều kiện đầu t=0:

$$w(x,0)=0 \Rightarrow A_k=0\ \forall k$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \omega x \Rightarrow B_k = -\frac{2\omega l}{k\pi\omega_k}\cos k\pi\ .$$

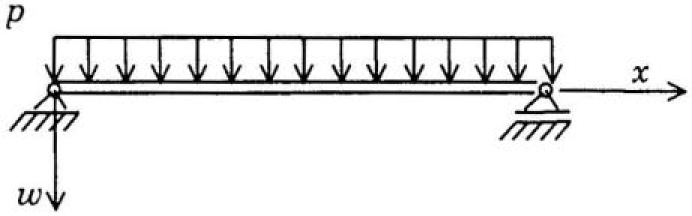
Ta tìm ω từ định lý bảo toàn năng lượng:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}mgh \Rightarrow \omega = \frac{1}{l}\sqrt{3gh}$$

$$\Rightarrow \qquad B_k = -\frac{2\sqrt{3gh}}{k\pi\omega_k}\cos k\pi = (-1)^{k+1}\frac{2\sqrt{3gh}}{k\pi\omega_k}$$

Vậy $$w(x,t) = \frac{2\sqrt{3gh}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\omega_k}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\omega_k t$$

Thí dụ 3.32 Dầm đơn giản chiều dài l chịu tải phân bố đều với cường độ p như hình TD 3.32. Tìm nghiệm dao động của dầm khi đột ngột cất tải.



Hình TD 3.32

Lời giải. Nghiệm dao động uốn tự do có dạng

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin k\frac{\pi x}{l}\left(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t\right)$$

với $$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Điều kiện đầu $t=0$:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k B_k\sin k\frac{\pi x}{l} = 0 \Rightarrow B_k=0 \ \forall k$$

$$\Rightarrow \qquad w = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin k\frac{\pi x}{l}\cos\omega_k t$$

Trước khi cất tải ($t=0$), ta có:

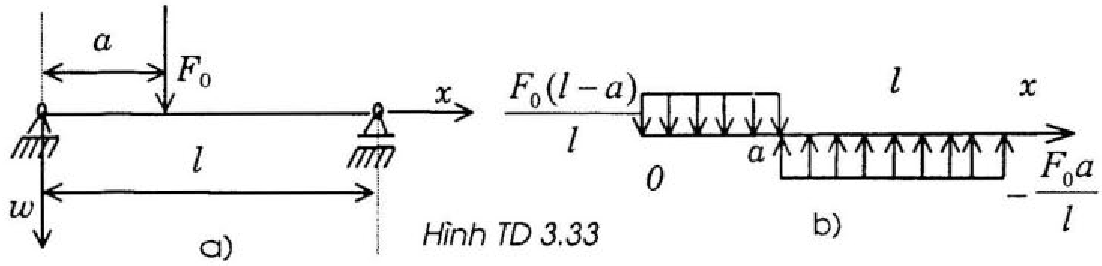
$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,0) = p \ \Rightarrow EI\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\sin k\frac{\pi x}{l} = p$$

$$\Rightarrow \qquad EIA_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{l}{2} = \int_0^l p\sin k\frac{\pi x}{l}dx = p\left(\frac{l}{k\pi}\right)\cos k\frac{\pi x}{l}\Big|_0^l$$

$$\Rightarrow A_k = \begin{cases} \dfrac{4l^4 p}{EIk^5\pi^5} & \text{khi } k \text{ lẻ} \\ 0 & \text{khi } k \text{ chẵn} \end{cases}$$

Vậy $$w(x,t) = \frac{4pl^4}{\pi^5 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^5}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\omega_{(2n-1)}t$$

Thí dụ 3.33 Một dầm đơn giản chịu lực tác dụng của lực tập trung F_0 như hình TD 3.33a. Dao động của dầm sẽ như thế nào nếu lực F_0 được đột ngột cắt bỏ?



Hình TD 3.33

Lời giải. Nghiệm dao động tự do của dầm:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin k\frac{\pi x}{l}\left(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t\right)$$

với $$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

Điều kiện đầu t=0:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k B_k\sin k\frac{\pi x}{l} = 0 \Rightarrow B_k = 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \qquad w = \sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin k\frac{\pi x}{l}\cos\omega_k t$$

Trước khi cất tải (*t=0*), ta có:

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = Q$$

$$\Rightarrow \qquad -EI\sum_{k=1}^{\infty}A_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3\cos k\frac{\pi x}{l} = Q$$

$$\Rightarrow \qquad -EIA_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3\frac{l}{2}=\int_0^l Q\cos k\frac{\pi x}{l}dx$$

$$\Rightarrow \qquad A_k=\left(\frac{2l^2}{k^3\pi^3}\right)^3\frac{1}{EI}\int_0^l Q\cos k\frac{\pi x}{l}dx$$

Chú ý rằng, trước khi cắt tải F_0, lực cắt Q có dạng như hình TD 3.33b.

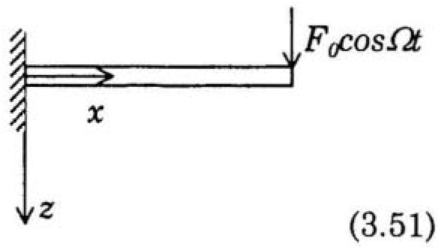
$$\Rightarrow \qquad Q=\begin{cases}\dfrac{F_0(l-a)}{l} & 0\le x\le a\\ -\dfrac{F_0a}{l} & a\le x\le l\end{cases}$$

$$A_k=\frac{2l^2}{k^3\pi^3}\frac{1}{EI}\left[\int_0^a\frac{F_0(l-a)}{l}\cos k\frac{\pi x}{l}dx-\int_a^l\frac{F_0a}{l}\cos k\frac{\pi x}{l}dx\right]=\frac{2l^3F_0}{k^4\pi^4EI}\sin k\frac{\pi a}{l}$$

Vậy $\qquad w(x,t)=\dfrac{2F_0l^3}{\pi^4EI}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin\frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\omega_k t$

3.3.2 Dao động uốn cưỡng bức của dầm

Thí dụ 3.34 Cho dầm đồng chất thiết diện không đổi, chiều dài l, ở đầu bên phải chịu tác dụng một lực điều hoà $F_0\cos\Omega t$. Hãy xác định biên độ dao động của dầm ở điểm chịu lực tác dụng.



Hình TD 3.34

Lời giải. Phương trình dao động của dầm:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0,c^2=\frac{EI}{\mu} \qquad (3.51)$$

Điều kiện biên:

$$w(0,t)=0,\quad M(l,t)=-EI\,w''(l,t)=0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0,\qquad Q(l,t)=-EI\,w'''(l,t)=F_0cos\Omega t$$

Ta tìm nghiệm bình ổn dưới dạng:

$$w(x,t)=X(x)\cos\Omega t \qquad (3.52)$$

Thế (3.52) vào (3.51) ta được phương trình:

$$X^{(IV)} - \frac{\Omega^2}{c^2} X = 0 \tag{3.53}$$

Nghiệm của (3.53) theo [1] có dạng:

$$X(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + C_3 \cosh kx + C_4 \sinh kx \tag{3.54}$$

với: $k = \sqrt{\dfrac{\Omega}{c}} = \sqrt[4]{\dfrac{\mu}{EI}\Omega^2}$

Chú ý đến các điều kiện biên trên ta có hệ phương trình:

$$X(0) = 0 : C_1 + C_3 = 0$$

$$X'(0) = 0 : C_2 + C_4 = 0$$

$$X''(l) = 0: -C_1 \cos kl - C_2 \sin kl + C_3 \cosh kl + C_4 \sinh kl = 0$$

$$X'''(l) = -\frac{F_0}{EI} : C_1 \sin kl - C_2 \cos kl + C_3 \sinh kl + C_4 \cosh kl = -\frac{F_0}{EIk^3 l^3}$$

Từ bốn phương trình trên ta suy ra:

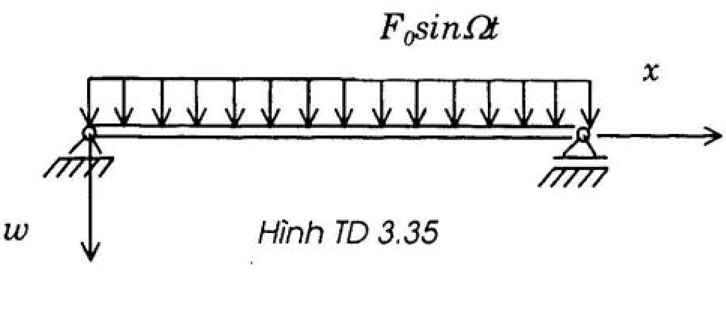
$$C_1 = -C_3 = -\frac{F_0}{2EIk^3 l^3} \frac{\sin kl + \sinh kl}{1 + \cos kl \cosh kl}$$

$$C_2 = -C_4 = -\frac{F_0}{2EIk^3 l^3} \frac{\cos kl + \cosh kl}{1 + \cos kl . \cosh kl}$$

Thế C_1, C_2, C_3, C_4 tìm được vào biểu thức (3.54) ta được biên độ dao động của điểm đầu dầm bên phải:

$$X(l) = \frac{F_0}{EIk^3 l^3} \frac{\sin kl \cos kl - \cos kl \sinh kl}{1 + \cos kl . \cosh kl}$$

Thí dụ 3.35 Cho một dầm đồng chất, tiết diện không đổi, chiều dài l chịu tác dụng của tải trọng ngoài phân bố đều cường độ là $F_0 \sin\Omega t$. Hãy xác định dao động uốn bình ổn của dầm.



Hình TD 3.35

Lời giải. Phương trình dao động uốn có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{F_0}{\mu} \sin \Omega t$$

trong đó: $c^2 = \dfrac{EI}{\mu}$

Nghiệm bình ổn của phương trình trên được tìm dưới dạng

$$w(x,t) = X(x)\sin\Omega t$$

Thay vào phương trình trên ta được:

$$X^{IV} - \frac{\Omega^2}{c^2}X = \frac{F_0}{\mu c^2}$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$X(x) = C_1\cos kx + C_2\sin kx + C_3\cosh kx + C_4\sinh kx - \frac{F_0}{\mu\Omega^2}$$

với: $$k = \sqrt{\frac{\Omega}{c}} = \sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}\Omega^2}$$

Thay nghiệm trên vào các điều kiện biên:

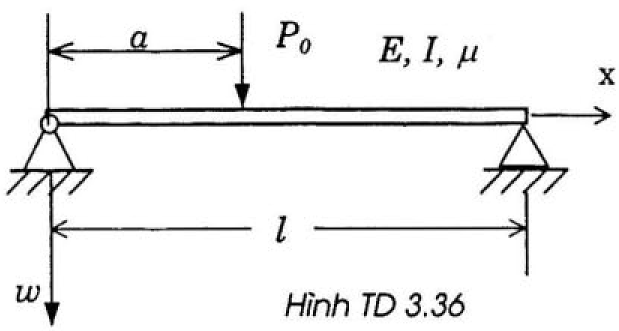
$$X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0$$

ta được:

$$C_1 = C_3 = \frac{F_0}{2\mu\Omega^2}, C_2 = \frac{F_0}{2\mu\Omega^2}tg\left(k\frac{l}{c}\right), C_4 = -\frac{F_0}{2\mu\Omega^2}tgh\left(k\frac{l}{c}\right)$$

Vậy $$w(x,t) = \frac{F_0}{\pi\Omega^2}\left\{\frac{\cos k(\frac{l}{2}-x)}{2\cos(k\frac{l}{2})} + \frac{\cosh k(\frac{l}{2}-x)}{2\cosh(k\frac{l}{2})} - 1\right\}\sin\Omega t$$

Thí dụ 3.36 Hãy khảo sát dao động của dầm khi cho lực P_0=*const* tác dụng đột ngột lên dầm ở tiết diện $x = a$, và xác định sự biến đổi của ứng suất pháp cực đại ở tiết diện trên. Biết rằng dầm đồng chất có khối lượng theo chiều dài là μ.



Hình TD 3.36

Lời giải. Phương trình vi phân dao động của dầm có dạng:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{P_0}{\mu}\delta(x-a) \tag{3.55}$$

Khai triển hàm $\delta(x-a)$ ra chuỗi các hàm riêng của dao động tự do:

$$\delta(x-a) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin k\frac{\pi x}{l}$$

$$C_k = \frac{2}{l}\int_0^l \delta(x-a)\sin k\frac{\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\sin k\frac{\pi a}{l}$$

Nghiệm của phương trình (3.55) được tìm dưới dạng:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t).\sin k\frac{\pi x}{l}$$

Thay các biểu thức trên vào (3.55) ta được:

$$\ddot{T}_k + \frac{EI}{\mu}\left(k\frac{\pi}{l}\right)^4.T_k = \frac{2}{l}\frac{P_0}{\mu}\sin k\frac{\pi a}{l} \qquad k = 1,2,\ldots$$

Tại thời điểm đầu $t=0$: $T_k = \dot{T}_k = 0$, vì vậy nghiệm của phương trình trên có dạng:

$$T_k = \frac{2P_0 l^3 \sin k\frac{\pi a}{l}}{EIk^4\pi^4}\left[1-\cos\omega_k t\right] \text{ với } \omega_k = \sqrt{\frac{EI}{\mu}}\left(k\frac{\pi}{l}\right)^2$$

$$w(x,t) = \frac{2P_0 l^3}{EI\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin k\frac{\pi a}{l}.\sin k\frac{\pi x}{l}(1-\cos\omega_k t)$$

Mômen uốn ở một tiết diện tuỳ ý của dầm bằng:

$$M = EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{2P_0 l^3}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{k^2 l^2}\sin k\frac{\pi a}{l}.\sin k\frac{\pi x}{l}(1-\cos\omega_k t)$$

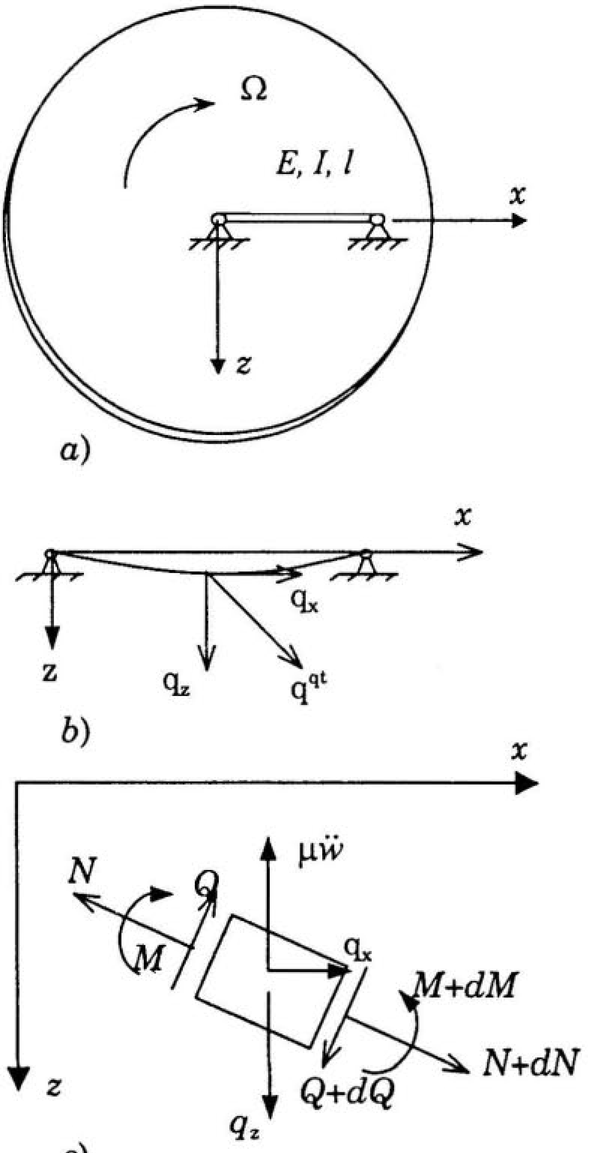
Ứng suất pháp cực đại ở thiết diện có lực tác dụng bằng:

$$|\sigma_{\max}| = \left|\frac{M}{W_x}\right|_{x=a} = \frac{2P_0 l}{\pi^2 W_x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2 k\frac{\pi a}{l}(1-\cos\omega_k t)$$

W_x là mômen chống uốn của mặt cắt.

3.3.3 Một số bài toán mở rộng

Thí dụ 3.37 Trên một đĩa, người ta gắn bản lề một dầm nhỏ (hình TD 3.37a). Đĩa quay với vận tốc góc Ω. Viết phương trình vi phân dao động uốn nhỏ của dầm.



Hình TD 3.37

Lời giải. Chọn hệ trục toạ độ Oxz gắn với đĩa như hình vẽ

Hình 3.37b vẽ thanh ở thời điểm tuỳ ý khi đó hệ lực dọc chịu tác dụng của lực quán tính phân bố $\vec{q}^{\,qt}$ được phân tích theo hai phương x và z thành 2 thành phần.

$$q_x = \mu x \Omega^2$$

$$q_z = \mu w \Omega^2$$

Xét một phân tố có chiều dài dx (hình 3.37c). Các lực có dạng như hình vẽ chiếu lên phương z ta được:

$$-\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + dQ + q_z.dx +$$

$$(N + dN).\sin\alpha' - N\sin\alpha = 0$$

Chú ý rằng:

$$\sin\alpha \approx \alpha; \sin\alpha' \approx \alpha' \approx \alpha + d\alpha$$

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}, dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}.dx = -EI.\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}.dx$$

nên phương trình có dạng:

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - q_z.dx - \frac{\partial}{\partial x}(N\frac{\partial w}{\partial x}) = 0 \qquad (3.56)$$

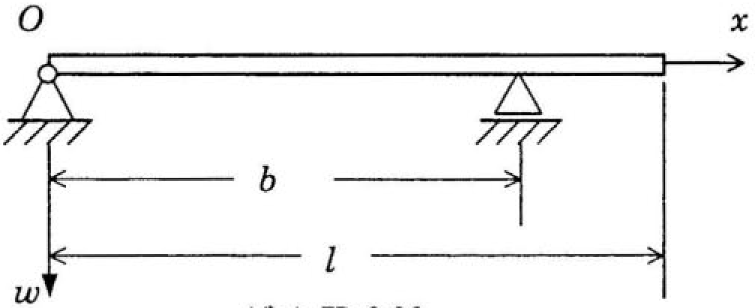
Lực dọc N phụ thuộc vào q_x và chú ý điều kiện biên:

$$N = \int_x^l q_x dx = \frac{1}{2}\mu\Omega^2(l^2 - x^2)$$

Thế vào (3.56) ta được

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \mu\Omega^2 w + \mu\Omega^2 x\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2}\mu\Omega^2(l^2 - x^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Thí dụ 3.38 Thiết lập phương trình tần số dao động uốn của dầm đồng chất tiết diện không đổi có dạng như hình TD 3.38



Hình TD 3.38

Lời giải. Theo [1], ta chia dầm làm hai đoạn, hàm riêng mỗi đoạn có dạng như sau.

Đoạn 1: x∈[0, b]

$$X_1(x) = C_1S_1(\lambda x) + C_2S_2(\lambda x) + C_3S_3(\lambda x) + C_4S_4(\lambda x)$$

Đoạn 2: x∈[b, l]

$$X_2(x) = C_1'S_1(\lambda x) + C_2'S_2(\lambda x) + C_3'S_3(\lambda x) + C_4'S_4(\lambda x)$$

trong đó: $\lambda^4 = \frac{\mu}{EI}\omega^2$ và S_1, S_2, S_3, S_4 là các hàm Krưlốp (hàm Rayleigh)

Xét các điều kiện biên:

$x = 0: X_1 = X_1'' = 0 \Rightarrow C_1 = C_3 = 0 \Rightarrow X_1(x) = C_2.S_2(\lambda x) + C_4.S_4(\lambda x)$

$x = b$: dịch chuyển $X_1(b) = X_2(b) = 0$

góc xoay $X_1'(b) = X_2'(b)$

mômen uốn $X_1''(b) = X_2''(b)$

lực cắt $\quad EI\dfrac{\partial^3 X_1}{\partial x^3}\bigg|_{x=b} = EI\dfrac{\partial^3 X_2}{\partial x^3}\bigg|_{x=b} - R$

ở đây R là biên độ phản lực ổ đỡ.

Từ các điều kiện biên ta rút ra được:

$$X_2(x) = X_1(x) + \frac{R}{\lambda^3 EI} S_4\left[\lambda(x-b)\right] \quad (x \in [b,l])$$

(Vì $S_4''' = S_1$ và $S_2(0) = S_3(0) = 0; S_1(0) = 1$)

Vậy hàm riêng trên toàn dầm:

$$X(x) = C_2.S_2(\lambda x) + C_4.S_4(\lambda x) + \frac{R}{\lambda^3 EI} S_4\left[\lambda(x-b)\right].\gamma(x-b)$$

trong đó $\gamma(x-b) = \begin{cases} 0 & khi \quad x < b \\ 1 & khi \quad x \geq b \end{cases}$

Xét các điều kiện biên còn lại:

$$x = b : X(b) = 0$$

$$x = l : X'' = X''' = 0$$

ta được:

$$\begin{cases} C_2.S_2(\lambda b) + C_4.S_4(\lambda b) = 0 \\ C_2.S_4(\lambda b) + C_4.S_2(\lambda b) + \dfrac{R}{\lambda^3 EI} S_2.\left[\lambda(l-b)\right] = 0 \\ C_2.S_3(\lambda b) + C_4.S_1(\lambda b) + \dfrac{R}{\lambda^3 EI} S_1.\left[\lambda(l-b)\right] = 0 \end{cases}$$

Để có nghiệm không tầm thường, định thức của hệ phương trình trên phải triệt tiêu:

$$\begin{vmatrix} S_2(\lambda b) & S_4(\lambda b) & 0 \\ S_4(\lambda l) & S_2(\lambda l) & S_2\left[\lambda(l-b)\right] \\ S_3(\lambda l) & S_1(\lambda l) & S_1\left[\lambda(l-b)\right] \end{vmatrix} = 0$$

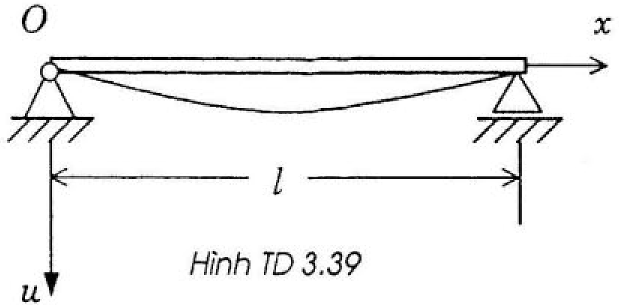
Đây chính là phương trình tần số có thể khai triển dưới dạng:

$$\begin{aligned}&S_2(\lambda b).S_2(\lambda l).S_1\left[\lambda(l-b)\right]+S_4(\lambda b).S_3(\lambda l).S_2\left[\lambda(l-b)\right]\\&-S_4(\lambda b).S_4(\lambda l).S_1\left[\lambda(l-b)\right]+S_2(\lambda b).S_1(\lambda l).S_2\left[\lambda(l-b)\right]=0\end{aligned} \quad (3.57)$$

Thí dụ 3.39 Áp dụng công thức Rayleigh, xác định tần số riêng cơ bản của dầm hai đầu gối bản lề và:

$$EI = EI_0\left(1+\sin\frac{\pi x}{l}\right)^3;$$

$$\mu(x) = \mu_0\left(1+\sin\frac{\pi x}{l}\right)^3$$



Hình TD 3.39

Lời giải.

Áp dụng công thức Rayleigh:

$$\omega_R^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} = \frac{\int_0^l EI(x).\left(f''(x)\right)^2 dx}{\int_0^l \mu.f^2(x)dx} \quad (3.58)$$

Vì hàm riêng $f(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$ thoả mãn các điều kiện biên

$x = 0,\ x = l$: $f = 0,\ f'' = 0$

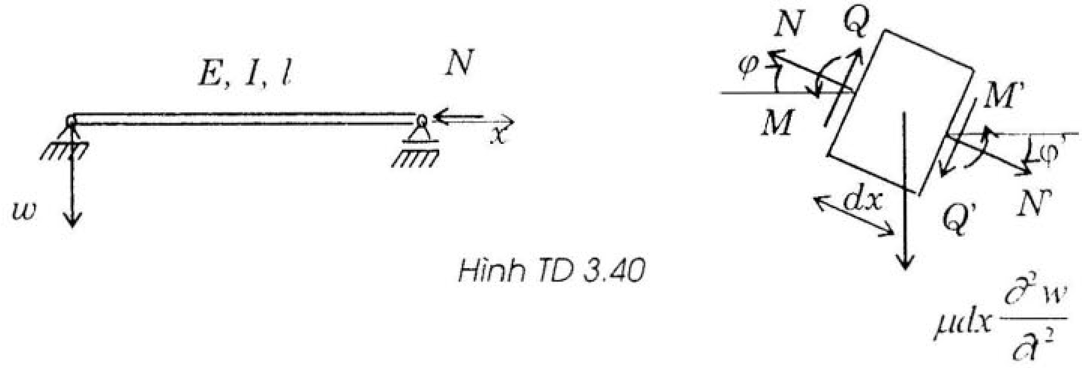
nên thay hàm riêng $f(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$ vào (3.58) ta được:

$$\omega_R^2 = \frac{U_{max}}{T_{max}} = \frac{\int_0^l EI_0\left(1+\sin\frac{\pi x}{l}\right)^3.\left(-\frac{\pi^2}{l^2}\right)^2.\sin^2\frac{\pi x}{l}dx}{\int_0^l \mu_0\left(1+\sin\frac{\pi x}{l}\right)^3.\sin^2\frac{\pi x}{l}dx}$$

$$\omega_R^2 = \frac{\pi^4}{l^4}.\frac{EI_0}{\mu_0}.\frac{\int_0^l\left(1+\sin\frac{\pi x}{l}\right)^3.\sin^2\frac{\pi x}{l}dx}{\int_0^l\left(1+\sin\frac{\pi x}{l}\right)^3.\sin^2\frac{\pi x}{l}dx} \approx 4,7\frac{\pi^4}{l^4}.\frac{EI_0}{\mu_0}$$

Vậy tần số riêng cơ bản $\omega_R = 2.16\dfrac{\pi^2}{l^2}.\sqrt{\dfrac{EI_0}{\mu_0}}$

Thí dụ 3.40 Viết phương trình dao động uốn nhỏ của dầm Euler Bernoulli đồng chất tiết diện không đổi, khi cho lực nén N không đổi tác dụng lên dầm (hình TD 3.40). Tìm các tần số dao động riêng của nó.



Hình TD 3.40

Lời giải. Xét một phân tố có chiều dài dx. Chiếu các lực tác dụng lên phương w ta được:

$$-\mu dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - dQ - Nd\varphi = 0$$

Mặt khác, đối với dầm Euler Bernoulli đồng chất tiết diện không đổi ta có:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}dx = EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}dx$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

Thay vào phương trình đầu ta được:

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.59)$$

Nghiệm của phương trình (3.59) được tìm dưới dạng:

$$w = \sum_{n=1}^{\prime}\left(\sin n\frac{\pi x}{l}\right)T_n(t)$$

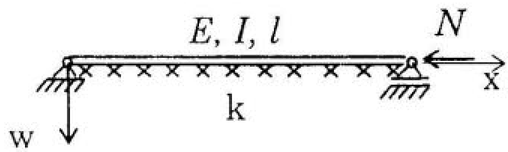
Thay biểu thức trên vào (3.50) ta được

$$\ddot{T}_n + \left[\left(n\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} - \frac{N}{\mu}\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2\right] T_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Tần số dao động của dầm $\omega_n = \sqrt{\left(n\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} - \frac{N}{\mu}\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2}$ n=1,2,...

Thí dụ 3.41 Cho dầm Euler Bernoulli nằm trên nền đàn hồi tuyến tính với hệ số cứng k, và bị nén bởi lực N như hình TD 3.41. Viết phương trình dao động ngang nhỏ của dầm và tính các tần số dao động của nó.

Lời giải. Áp dụng cách giải của thí dụ 3.27 và thí dụ 3.40 ta có phương trình dao động ngang nhỏ của dầm:



Hình TD 3.41

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw = 0$$

Nghiệm của phương trình được tìm dưới dạng:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin n\frac{\pi x}{l}\right) T_n(t)$$

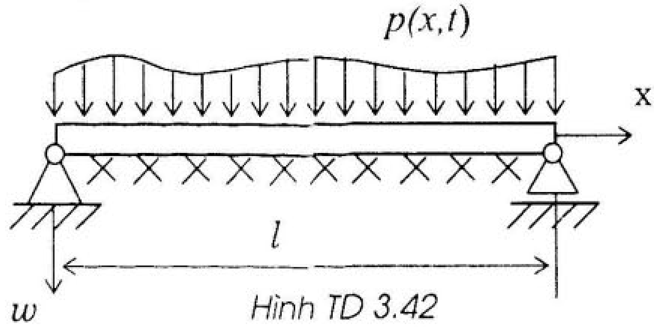
Thay vào phương trình trên ta được:

$$\ddot{T}_n + \left[\left(n\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} - \frac{N}{\mu}\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2 + \frac{k}{\mu}\right] T_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Tần số dao động của dầm:

$$\omega_n = \sqrt{\left(n\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{\mu} - \frac{N}{\mu}\left(n\frac{\pi}{l}\right)^2 + \frac{k}{\mu}}$$

Thí dụ 3.42 Thiết lập phương trình vi phân dao động uốn của dầm đồng chất tiết diện không đổi đặt trên nền đàn hồi tuyến tính với hệ số cứng phân bố là k, chịu tác dụng của lực phân bố $p(x,t)$.



Hình TD 3.42

Tìm nghiệm bình ổn khi $p(x,t)=F_0\cos\Omega t$.

Lời giải. Áp dụng nguyên lý d'Alembert cho một phân tố của dầm ta được phương trình:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{k}{\mu} w = \frac{1}{\mu} p(x,t)$$

Khi $p(x,t) = F_0 \cos \Omega t$, nghiệm bình ổn của phương trình trên được tìm dưới dạng $w(x,t) = X(x)\cos \Omega t$

Thế vào phương trình đầu ta được:

$$X^{iv} - \xi^4 X = \frac{F_0}{EI} \text{ với } \xi = \sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}(\Omega^2 - \frac{k}{\mu})}$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$X(x) = C_1 \cos\xi x + C_2 \sin\xi x + C_3 \cosh\xi x + C_4 \sinh\xi x - \frac{F_0}{\mu(\Omega^2 - \frac{k}{\mu})}$$

Từ các điều kiện biên:

$$X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0$$

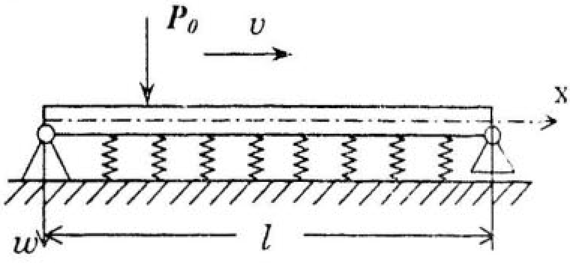
ta được:

$$C_1 = C_3 = \frac{F_0}{2\mu\left(\Omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)},\ C_2 = \frac{F_0}{2\mu\left(\Omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)} tg\left(\xi \frac{l}{c}\right),$$

$$C_4 = -\frac{F_0}{2\mu\left(\Omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)} tgh\left(\xi \frac{l}{c}\right)$$

Vậy: $$w = \frac{F_0}{\mu\left(\Omega^2 - \frac{k}{\mu}\right)}\left\{\frac{\cos\xi(\frac{l}{2} - x)}{2\cos(\xi\frac{l}{2})} + \frac{\cosh\xi(\frac{l}{2} - x)}{2\cosh(\xi\frac{l}{2})} - 1\right\}\cos \Omega t$$

Thí dụ 3.43 Một toa xe chạy đều trên đường ray thẳng được mô hình hoá là một lực P_0=const chuyển động với vận tốc v không đổi dọc theo một dầm đồng chất trên nền đàn hồi tuyến tính với hệ số k như hình vẽ. Hãy tìm độ võng của dầm, biết rằng khi t =0, lực nằm ở gối trái.



Hình TD 3.43

Lời giải. Phương trình vi phân dao động của dầm là

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{k}{\mu}w = \frac{P_0}{\mu}\delta(x - vt)$$

Tính toán tương tự như mục 3.3.b ([1]) ta được

$$w(x, t) = \frac{2P_0}{\mu l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi x}{l}.\frac{\sin\frac{n\pi}{l}vt - \frac{n\pi}{l\omega_n}\sin\omega_n t}{\omega_n^2 - \left(\frac{n\pi}{l}v\right)^2}$$

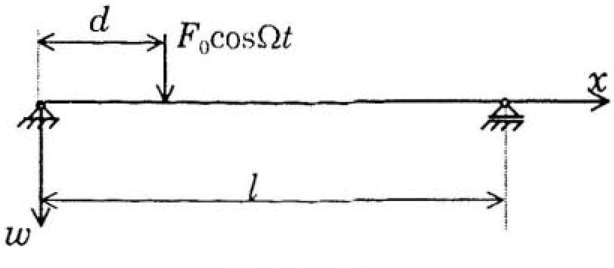
với: $\omega_n^2 = \frac{EI}{\mu}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 + \frac{k}{\mu}$.

Bài tập chương III

3.1 Ta xem rằng khi gõ mạnh và nhanh vào giữa sợi dây (có hai đầu buộc chặt) đang đứng yên, dây được truyền vận tốc đầu theo quy luật $v_0x(l-x)$. Tìm chuyển động của dây.

Đáp số: $w(x,t) = \frac{8l^3v_0}{\pi^4 c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\left[\sin(2n-1)\frac{x}{l}\pi\right]\sin\frac{(2n-1)\pi c}{l}t$

3.2 Một dây đồng chất chiều dài l, được cố định 2 đầu và chịu lực tác dụng $F_0\cos\Omega t$ tại điểm $x=d$ của dây. Tìm nghiệm bình ổn của dao động dây.



Hình BT 3.2

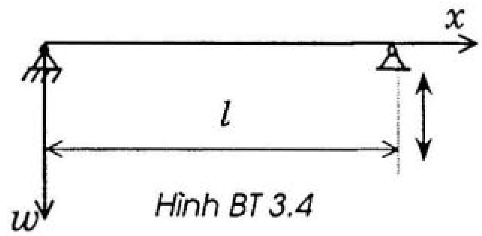
Đáp số: $w(x,t) = \dfrac{2F_0 l}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi d}{l}\cos\Omega t}{n^2\pi^2 c^2 - l^2\Omega^2} \sin\dfrac{n\pi}{l}x$

3.3 Một dây cáp đồng chất chiều dài l được buộc chặt hai đầu. Dây cáp được nhúng vào nước và có hệ số cản tỷ lệ theo chiều dài là β. Một lực $F_0\cos\Omega t$ tác dụng tại điểm $x = d$ của dây. Tìm nghiệm bình ổn của dao động uốn của dây.

Đáp số: $w(x,t) = \dfrac{2F_0}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi d}{l}\sin(\Omega t + \psi_n)}{\sqrt{\mu^2\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right) + \Omega^2\beta^2}} \sin n\dfrac{\pi x}{l}$

với $\qquad \omega_n = n\dfrac{\pi c}{l}; \operatorname{cotg}\psi_n = \dfrac{\beta\Omega}{\mu\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)}$

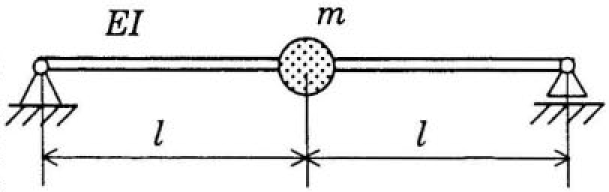
3.4 Một dây đồng chất chiều dài l được cố định một đầu còn đầu kia chuyển động theo luật $w = A\sin\Omega t$ (xem hình BT 3.4). Xác định nghiệm bình ổn của dao động uốn của dây.



Hình BT 3.4

Đáp số: $w(x,t) = A\dfrac{\sin\dfrac{\Omega x}{c}}{\sin\dfrac{\Omega l}{c}}\sin\Omega t$

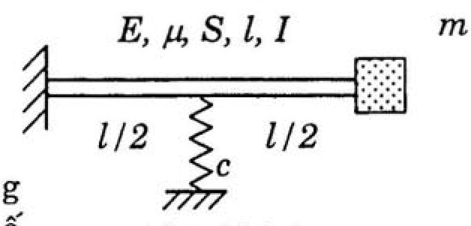
3.5 Dùng phương pháp Rayleigh xác định tần số riêng thấp nhất của hệ cho trên hình vẽ. Khối lượng m gắn giữa dầm, dầm có độ cứng chống uốn EI, khối lượng một đơn vị dài thanh là μ. Chọn hàm riêng là $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2l}$.



Hình BT 3.5

Đáp số: $\omega_k = \dfrac{\pi^2}{4l^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\mu l + m}}$

3.6 Dầm dao động uốn như hình vẽ. Dùng phương pháp Rayleigh xác định tần số riêng thấp nhất.



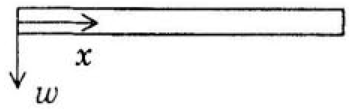
Hình BT 3.6

Chọn hàm $f(x) = 3\dfrac{x^2}{l^2} - \dfrac{x^3}{l^3} \quad \Rightarrow \quad \omega_R^2 = \dfrac{12\dfrac{EI}{l^3} + \dfrac{25}{64}c}{\dfrac{33}{35}\mu l + 4m}$.

Chọn hàm $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{2l} \quad \Rightarrow \quad \omega_R^2 = \dfrac{\dfrac{\pi^4 EI}{16l^3} + c}{\mu l + 2m}$.

Đáp số $w_R = \sqrt{\dfrac{EI(\pi / l)^4 + 2c}{\mu l + 2m}}$

3.7 Mô hình cơ học đơn giản của một tên lửa trong không gian là dầm dao động uốn có hai đầu tự do. Cho biết m=4000 kg, l=12 m, EI=2,6.10^9 Nm^2. Hãy tìm phương trình đặc trưng, các trị riêng và hai tần số riêng đầu tiên của tên lửa.



Hình BT 3.7

Đáp số: Phương trình đặc trưng: $\cos\lambda \cosh\lambda = 1$

$\lambda_n \approx (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

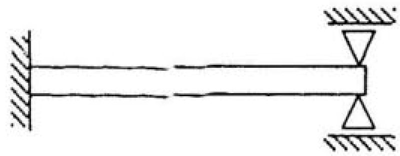
$\omega_1 = 434\ s^{-1}$; $\omega_2 = 1196\ s^{-1}$

3.8 Một dầm dài l=5 m, khối lượng đơn vị dài μ =160 kg/m, độ cứng chống uốn EI=1,25.10^8 Nm^2. Đầu dầm bên phải ngàm chặt, đầu dầm bên trái có thể quay tự do, không dịch chuyển theo phương thẳng đứng (hình BT 3.8). Hãy tính toán dao động tự do của dầm, cụ thể là

a) Các điều kiện biên

b) Phương trình đặc trưng

c) Trị riêng và tần số riêng đầu tiên.



Hình BT 3.8

Đáp số:

a) w(0,t)= w(l,t)=0; w'(0,t)=0; w''(l,t)=0

b) tgλ = tghλ

c) λ_1 = 3,9266, ω_1 = 545 s^{-1}.

Chương 4

Tính toán dao động bằng các hệ chương trình MAPLE, MATLAB và MATHCAD

4.1 Giới thiệu chung về các hệ chương trình tính MAPLE, MATLAB và MATHCAD

Các phần mềm tính toán (còn được gọi là các hệ chương trình tính) là công cụ hỗ trợ một cách nhanh chóng và có hiệu quả trong việc giải quyết các bài toán của khoa học-kỹ thuật.

Hiện nay, bốn hệ chương trình tính toán đa năng lớn được sử dụng phổ biến trong các trường đại học và các trung tâm nghiên cứu trên thế giới là MATHEMATICA, MATLAB, MAPLE và MATHCAD. Nhìn chung, các hệ chương trình nêu trên đều là những ngôn ngữ lập trình bậc cao, có cấu trúc cơ bản gần giống nhau và đều có các phiên bản có thể chạy trên máy tính cá nhân cũng như các phiên bản chạy trên các máy tính mạng (workstations). Trong tài liệu này, chúng tôi giới thiệu các hệ chương trình MATLAB, MAPLE và MATHCAD để giải một số bài toán dao động kỹ thuật.

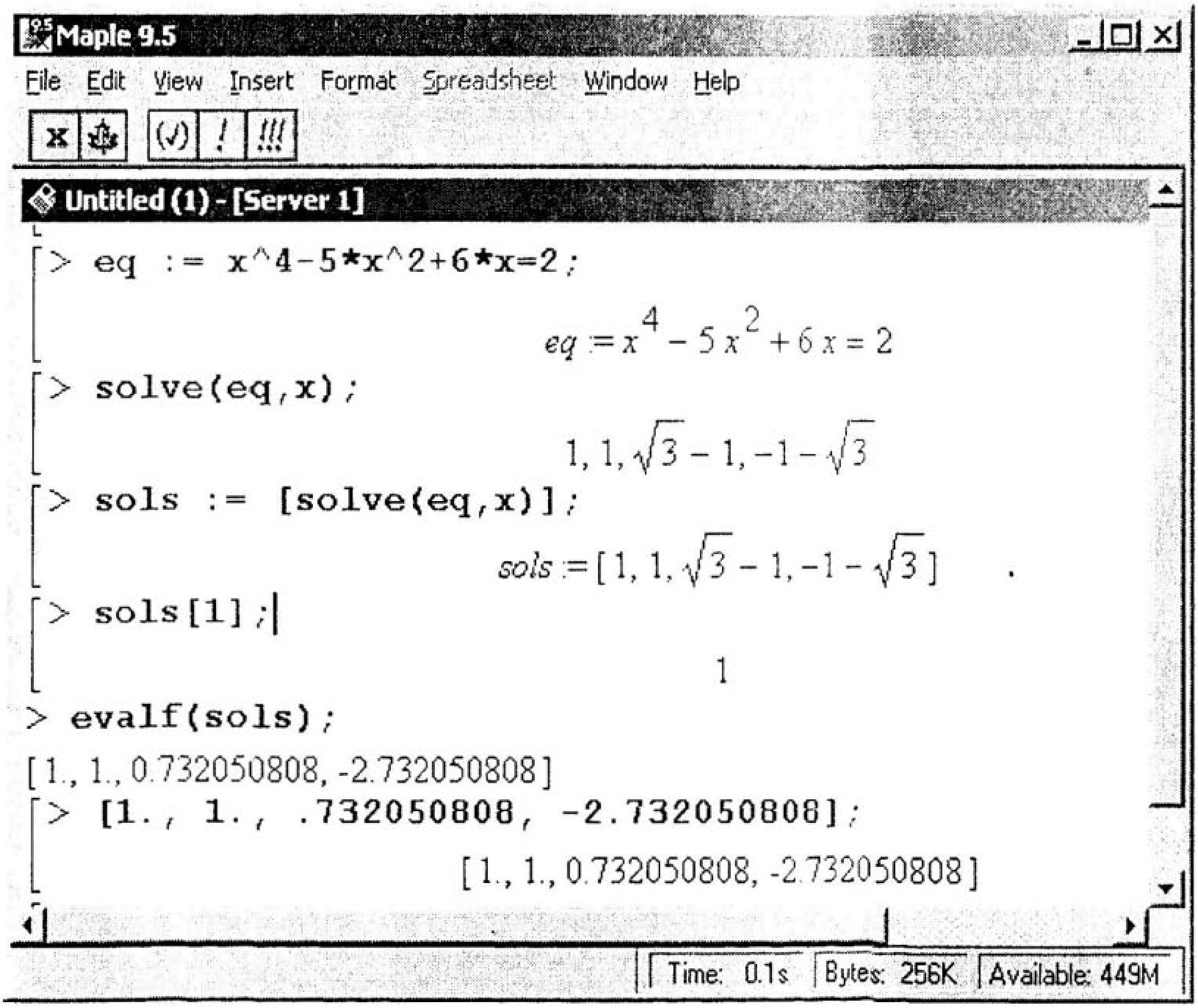
4.1.1 Cơ sở về MAPLE

MAPLE là sản phẩm phần mềm của hãng Maplesoft®. Hãng này được thành lập vào năm 1988 và có trụ sở chính tại Waterloo (Canada). Trong cuốn sách này ta sử dụng phiên bản MAPLE 10 (năm 2005). MAPLE là một môi trường dành cho tính toán và lập trình tiên tiến với một tập hợp các hàm toán học phong phú, mỗi hàm tương đương với một nhóm các chương trình con. Đặc biệt, khi sử dụng máy tính cá nhân, các công cụ để tính toán và xử lý các biểu thức toán học bằng chữ (*symbolic*) của MAPLE có nhiều ưu điểm vượt trội so với một số hệ chương trình khác trên cả hai phương diện: mạnh và dễ tiếp cận. Hệ chương trình này có một giao diện làm việc tiện lợi cho người sử dụng, đặc tính đồ họa trực tiếp (cho phép vẽ đồ thị ngay trong trang làm việc). Các tính năng của MAPLE liên tục được cải tiến và mở rộng trong các phiên bản tiếp theo. Người sử dụng có thể xem các thông tin cụ thể về hệ chương trình này trên địa chỉ:

http://www.maplesoft.com/products/maple/

- **Giao diện đồ hoạ trang làm việc của MAPLE**

Phiên bản MAPLE 9.5 cung cấp cho người sử dụng một giao diện đồ hoạ được xây dựng trên ngôn ngữ lập trình Java. Giao diện này yêu cầu nhiều bộ nhớ hơn so với các phiên bản trước. Tuy nhiên, ta có thể kích hoạt giao diện với tên gọi *Classic Worksheet* của MAPLE 9.5 (hình 4.1) khi làm việc với máy tính có tốc độ thấp. Giao diện *Classic Worksheet* có dạng gần giống như các phiên bản cũ của MAPLE.



Hình 4.1: Classic Worksheet của MAPLE 9

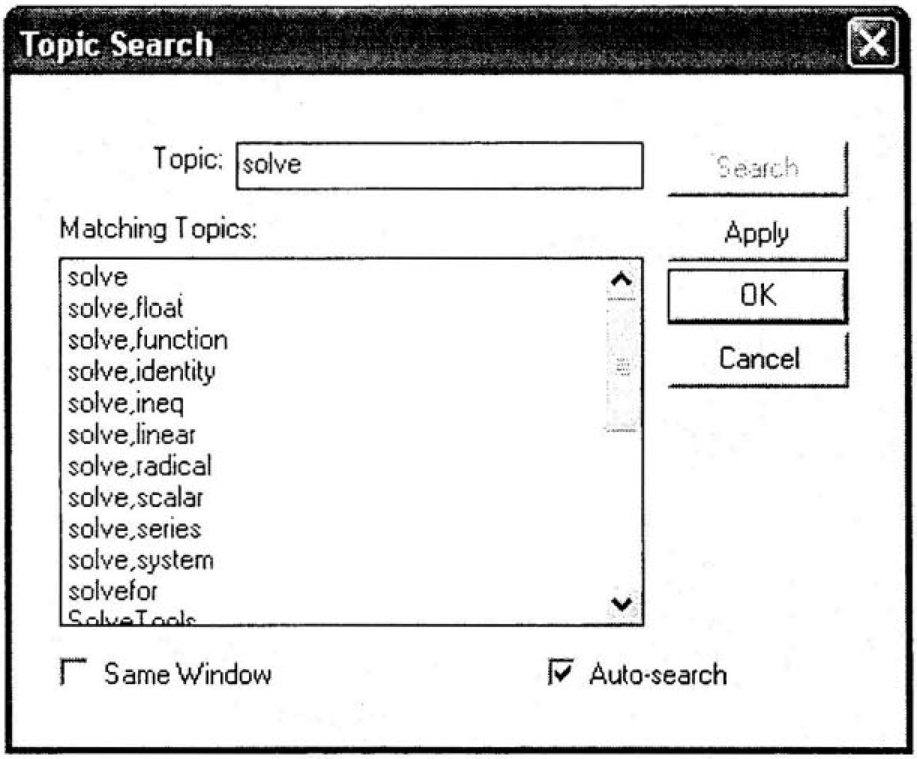
Trên trang làm việc, người sử dụng nhập lệnh từ bàn phím và chương trình sẽ đưa ra kết quả tương ứng với dòng lệnh này sau khi gõ phím ENTER. Chương trình sẵn sàng để nhập câu lệnh sau dấu nhắc >. Mỗi câu lệnh phải được kết thúc bằng dấu chấm phẩy (;) hoặc dấu hai chấm (:). Hệ thống Menu cho phép ta mở, lưu trữ, in ấn trang làm việc (menu *File*), thay đổi các định dạng của trang (menu *Format*) hay các trợ giúp soạn thảo lệnh (menu *Edit*).

Mặc dầu MAPLE có rất nhiều lệnh để sử dụng ngay sau khi chương trình sẵn sàng làm việc, một số nhóm lệnh chuyên dụng (gọi là các gói chương trình-*Packages*) chỉ có thể sử dụng được khi ta kích hoạt, thí dụ, lệnh kích hoạt gói chương trình gồm các phép tính trên ma trận được nhập như sau:

```
> with(linalg);
```

• Tiện ích trợ giúp của MAPLE

MAPLE có một hệ thống trợ giúp trực tuyến phong phú và chi tiết. Menu *Help* của trang làm việc cho ta nhiều khả năng tìm kiếm trợ giúp chức năng của câu lệnh các chủ đề khác nhau (xem hình 4.2).



Hình 4.2: Tìm kiếm trợ giúp trên MAPLE

Một khả năng trợ giúp khác là nhập dấu ? ngay trước tên lệnh và không kết thúc lệnh bằng dấu chấm phẩy (;) hoặc dấu hai chấm (:), thí dụ:

```
> ?solve
```

• Các hàm toán học của MAPLE

Bảng 4.1

Tên hàm cơ bản	Chức năng
`exp(x)`	Hàm số mũ e^x
`sqrt(x)`	Căn bậc hai của biến x
`abs(f)`	Giá trị tuyệt đối của biểu thức f
`sin(x),cos(x),tan(x)`	Các hàm lượng giác
`arcsin(x), arccos(x)`	Hàm arcsin và arccos
`ln(x),log[a](x)`	Lôgarit tự nhiên và lôgarit cơ số a của x

Chương trình MAPLE chứa vài trăm hàm toán học. Bảng 4.1 liệt kê một số hàm được sử dụng trong các bài tập thí dụ. Bạn đọc có thể tra cứu thông tin về các hàm toán học khác nhờ tiện ích trợ giúp của chương trình.

- **Các kiểu dữ liệu**

Một số kiểu dữ liệu quan trọng dưới đây được sử dụng trong chương trình MAPLE:

- *Chuỗi* (sequences) với lệnh seq:

```
> ch1:=seq(i^2,i=1..5);
```

$$ch1 := 1, 4, 9, 16, 25$$

```
> ch1[3];
```

$$9$$

- *Danh sách* (lists):

```
> list1:=[x,y,z,1,10,100];
```

$$list1 := [x, y, z, 1, 10, 100]$$

```
> list1[5];
```

$$10$$

- *Tập hợp* (sets):

```
> set1:={a,b,c,2,3,x^2=y};
```

$$set1 := \{2, 3, a, b, c, x^2 = y\}$$

```
> set1[6];
```

$$x^2 = y$$

- *Bảng* (tables) với lệnh table:

```
> table1:=table([a=Chieu_dai,b=Chieu_rong,h=Chieu_cao]):
> table1[h];
```

$$Chieu\_cao$$

```
> indices(table1);entries(table1);
```

$$[h], [b], [a]$$

$$[Chieu\_cao], [Chieu\_rong], [Chieu\_dai]$$

- *Chuỗi ký tự* (strings):

```
> str1:="Maple";
```

$$str1 := \text{"Maple"}$$

```
> str1[1..3];
```

$$\text{"Map"}$$

- *Mảng nhiều chiều* (arrays) với lệnh array:

```
> a1:=array(1..2,1..2);
```

$$a1 := \text{array}(1..2, 1..2, [\ ])$$

```
> a1[1,1]:=1:a1[1,2]:=2:a1[2,1]:=x:a1[2,2]:=y:
> print(a1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{bmatrix}$$

- **Làm việc với MAPLE**

Bảng 4.2 trình bày một số toán tử và câu lệnh cơ bản nhằm giúp cho bạn đọc có thể hiểu được một chương trình tính toán dao động bằng MAPLE.

Bảng 4.2

Các toán tử và câu lệnh	Chức năng
+, -, *, /	Các phép cộng, trừ, nhân, chia
^	Phép luỹ thừa
:=	Phép gán
->	Phép định nghĩa một hàm số
int(x(t),t)	Tích phân của biến *x* theo biến t
diff(x(t),t)	Đạo hàm của biến *x* theo biến t
solve()	Giải hệ các phương trình đại số
dsolve()	Giải hệ phương trình vi phân
plot()	Vẽ đồ thị
linalg[det](M)	Tính định thức của ma trận **M**
linalg[inverse](M)	Tính ma trận nghịch đảo của ma trận **M**
Eigenvals(M)	Tính trị riêng của ma trận **M**
Eigenvals(M,vecs)	Tính véc tơ riêng của ma trận **M**

MAPLE cho phép ta xây dựng một chương trình với các toán tử điều khiển (toán tử điều khiển lặp *for* và *while*, toán tử điều kiện *if*, vv...) giống như một ngôn ngữ lập trình thông thường (xem các thí dụ trong mục 4.4).

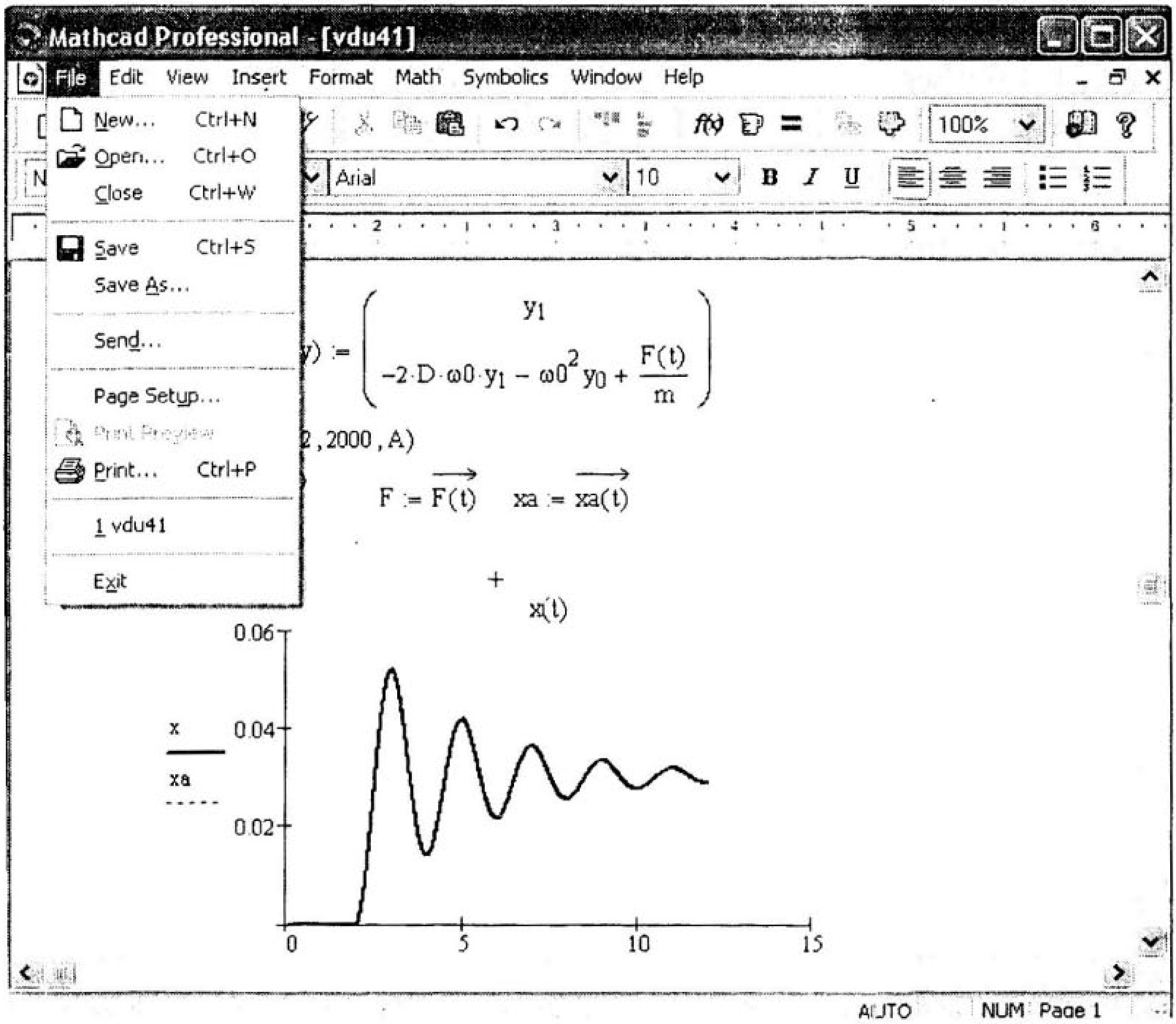
4.1.2 Cơ sở về MATHCAD

MATHCAD là sản phẩm phần mềm của hãng Mathsoft® có trụ sở tại Cambridge (Anh), hãng được thành lập vào năm 1985. Hai phiên bản gần đây là MATHCAD 11 (năm 2003) MATHCAD 12 Professional (năm 2004). Phần mềm tính toán MATHCAD được xây dựng nhằm trợ giúp cho các kỹ sư giải quyết các bài toán kỹ thuật và đang được coi là một môi trường tính toán thiết kế tiên tiến. Hiện nay ngày càng có nhiều nhà khoa học, nhiều kỹ sư trên thế giới sử dụng MATHCAD. Ngoài các tính năng cơ bản của một hệ chương trình tính, MATHCAD còn có một đặc điểm nổi bật là cho phép người sử dụng xây dựng các công thức, biểu thức, phương trình, các ký hiệu toán học theo cách viết truyền thống. Toàn bộ chương trình tính từ khai báo, lập chương trình đến xuất kết quả bằng đồ thị được trình bày trên một trang làm việc duy nhất. Hệ thống các thư viện chương trình của MATHCAD cung cấp một loạt các chương trình mẫu trong một số chuyên ngành kỹ thuật, ví dụ: tính toán phần tử hữu hạn, xử lý tín hiệu số,... cho phép người sử dụng không cần phải có kỹ năng lập trình vẫn có thể tính toán với MATHCAD. Các thông tin về hệ chương trình này được cung cấp trên địa chỉ:

http://www.mathcad.com

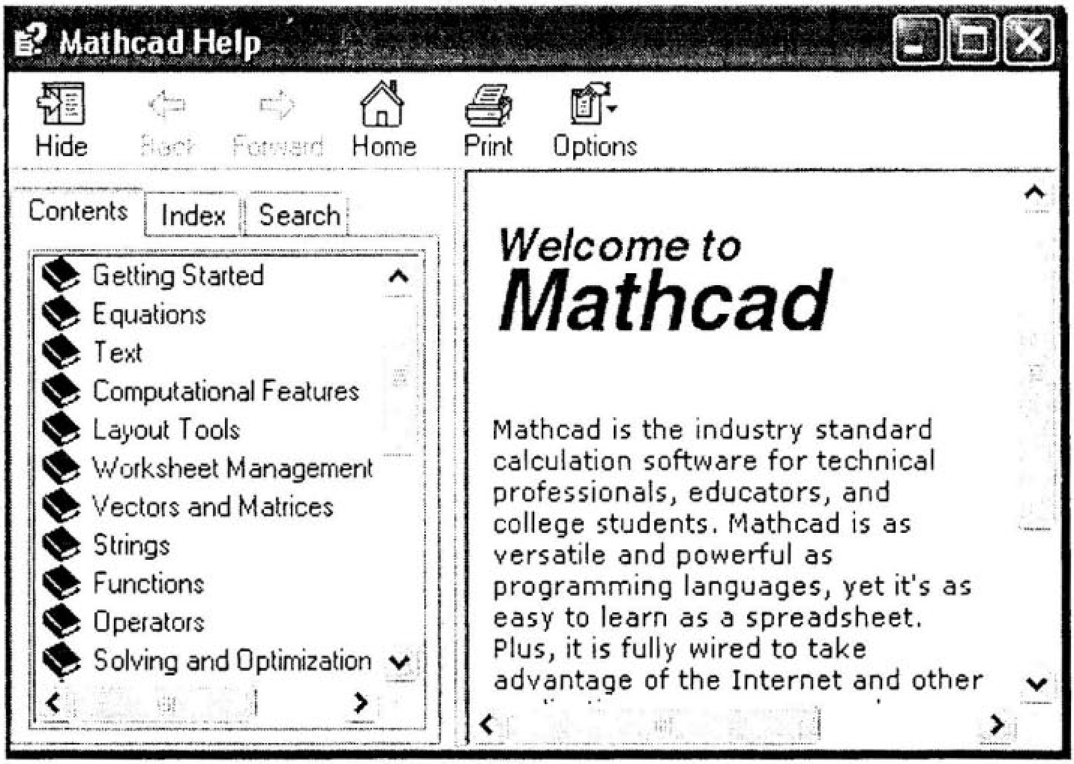
- **Trang làm việc của MATHCAD**

Môi trường tính toán của MATHCAD là trang làm việc (Worksheet) được minh hoạ trên hình vẽ 4.3.



Hình 4.3: Một Worksheet của MATHCAD

Trên thanh Menu của giao diện, menu *File* chứa các chức năng mở, lưu trữ, in ấn trang làm việc, menu *Insert* được sử dụng để chèn các công thức, các toán tử, các dòng chú thích và các đồ thị. Menu *Format* thay đổi các định dạng của các công thức, các đồ thị kết quả. Chức năng điều khiển việc tính toán và hiển thị kết quả nằm trong menu *Math*. Menu *Help* cung cấp các tiện ích trợ giúp (xem hình 4.4).

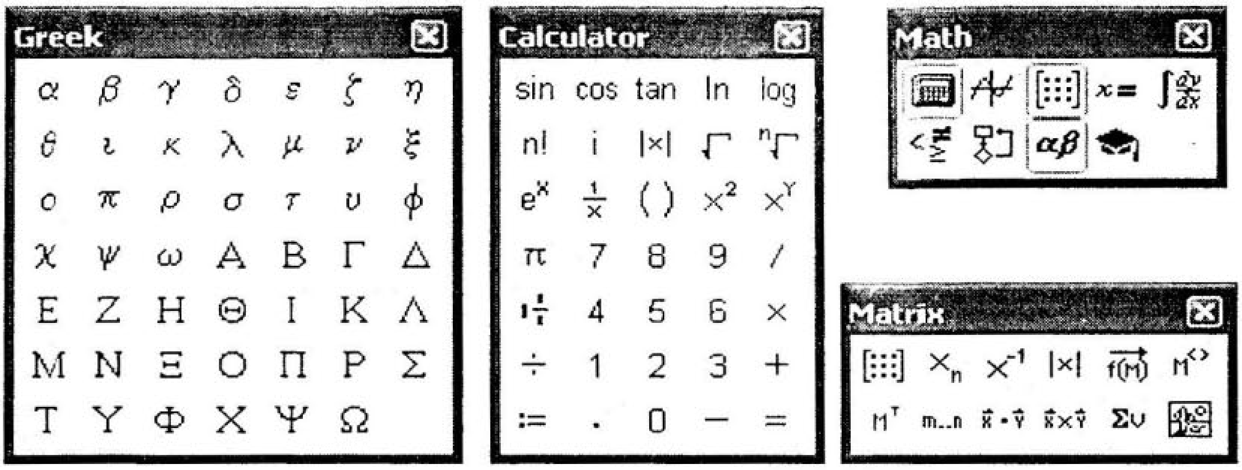


Hình 4.4: Tiện ích trợ giúp của MATHCAD

- **Soạn thảo chương trình**

MATHCAD có một số công cụ với chức năng định dạng ký tự, chèn các toán tử như tích phân $\int_a^b(\ )$, vi phân $\frac{d}{dx}(\ )$, các đại lượng như ma trận, véc tơ và các ký tự đặc biệt $\alpha, \xi, \ldots$ (xem hình 4.5). Điều này làm cho chương trình tính trông giống như các công thức toán học thông thường được viết trên giấy.

Một trang làm việc của MATHAD bao gồm: vùng chứa các lệnh của chương trình, vùng chứa các chú thích (*text*) và vùng chứa các đồ thị. Các dòng lệnh được nhập vào ngay tại vị trí con trỏ trên màn hình (dấu + màu đỏ). Giống như các hệ chương trình khác, MATHCAD tính toán theo trình tự dòng lệnh (có nghĩa là tuần tự theo các lệnh từ trái qua phải, từ trên xuống dưới). Bạn đọc có thể tự học kỹ năng soạn thảo công thức lệnh theo các chỉ dẫn trong tiện ích trợ giúp của chương trình.



Hình 4.5: Một số công cụ hỗ trợ soạn thảo lệnh của MATHCAD

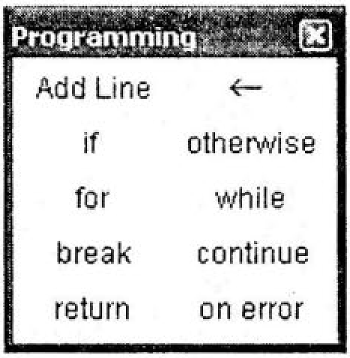
Để hỗ trợ việc soạn thảo chương trình tính một cách nhanh chóng, chương trình cho phép ta sử dụng một số các phím tắt để nhập các toán tử và chèn đồ thị vào trang làm việc. Bảng 4.3 liệt kê một số phím tắt thường sử dụng với MATHCAD.

Bảng 4.3

Phím tắt	Hiển thị	Ý nghĩa	Thí dụ
Shift + ;	$\blacksquare := \blacksquare$	phép gán	$a := 1($
\	$\sqrt{\blacksquare}$	căn bậc hai	$z := \sqrt{y^2 + x}$
Ctrl + \	$\sqrt[\blacksquare]{\blacksquare}$	căn bậc N	$\sqrt[3]{8} = 2\blacksquare$
‘ (dấu phẩy trên)	$(\blacksquare)$	ngoặc đơn	$a := \left(1 + \frac{1}{x}\right)\cdot y$
Shift + /	$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$	đạo hàm	$z := \frac{d}{dx}\left(y^2 x\right)$
Shift + 7	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$	tích phân	$z := \int_a^b y^5 \, dx$
Ctrl + *l*	$\lim_{\blacksquare \to \blacksquare} \blacksquare$	giới hạn	$A := \lim_{x \to \infty} \sqrt{a(x)}$
Ctrl + Shift + 4	$\sum_{\blacksquare = \blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare$	tổng hữu hạn	$B := \sum_{i=1}^{10} x^{\langle i \rangle}$
Shift + 2		Chèn đồ thị vào vị trí con trỏ	

- **Lập trình với MATHCAD**

MATHCAD cho phép ta xây dựng một chương trình tính toán lặp. Trên hình 4.6 là công cụ chèn các toán tử điều khiển lặp *for* và *while*, toán tử điều kiện *if* để hỗ trợ cho việc soạn thảo một chương trình con theo thí dụ dưới đây.



Tính đạo hàm (bằng PP. số)

$$
\mathrm{diff}(u,v) := \left|\begin{array}{l}
len \leftarrow \mathrm{length}(u) - 1 \\
\text{for } i \in 0..len - 1 \\
\quad kv_i \leftarrow \dfrac{u_{i+1} - u_i}{v_{i+1} - v_i} \\
kv
\end{array}\right.
$$

Hình 4.6: Công cụ hỗ trợ lập trình

- **Điều khiển tính toán, thông báo lỗi và xuất kết quả**

Theo chế độ mặc định, MATHCAD sẽ tính toán lại toàn bộ chương trình trên trang làm việc mỗi khi ta thay đổi giá trị một biến hoặc một công thức. Điều này có thể làm cho người sử dụng tốn thời gian chờ đợi chương trình thực hiện. Chế độ này có thể được thay đổi bằng cách xoá tuỳ chọn Automatic Calculation trong Menu *Math*. MATHCAD chỉ tiếp tục tính toán khi nhấn phím F9.

Mỗi khi xuất hiện lỗi chương trình (thí dụ chưa gán giá trị cho biến, lỗi công thức, lỗi cú pháp lệnh,...), MATHCAD sẽ hiển thị thông báo lỗi thông qua thay đổi màu sắc của biến hoặc công thức chứa lỗi.

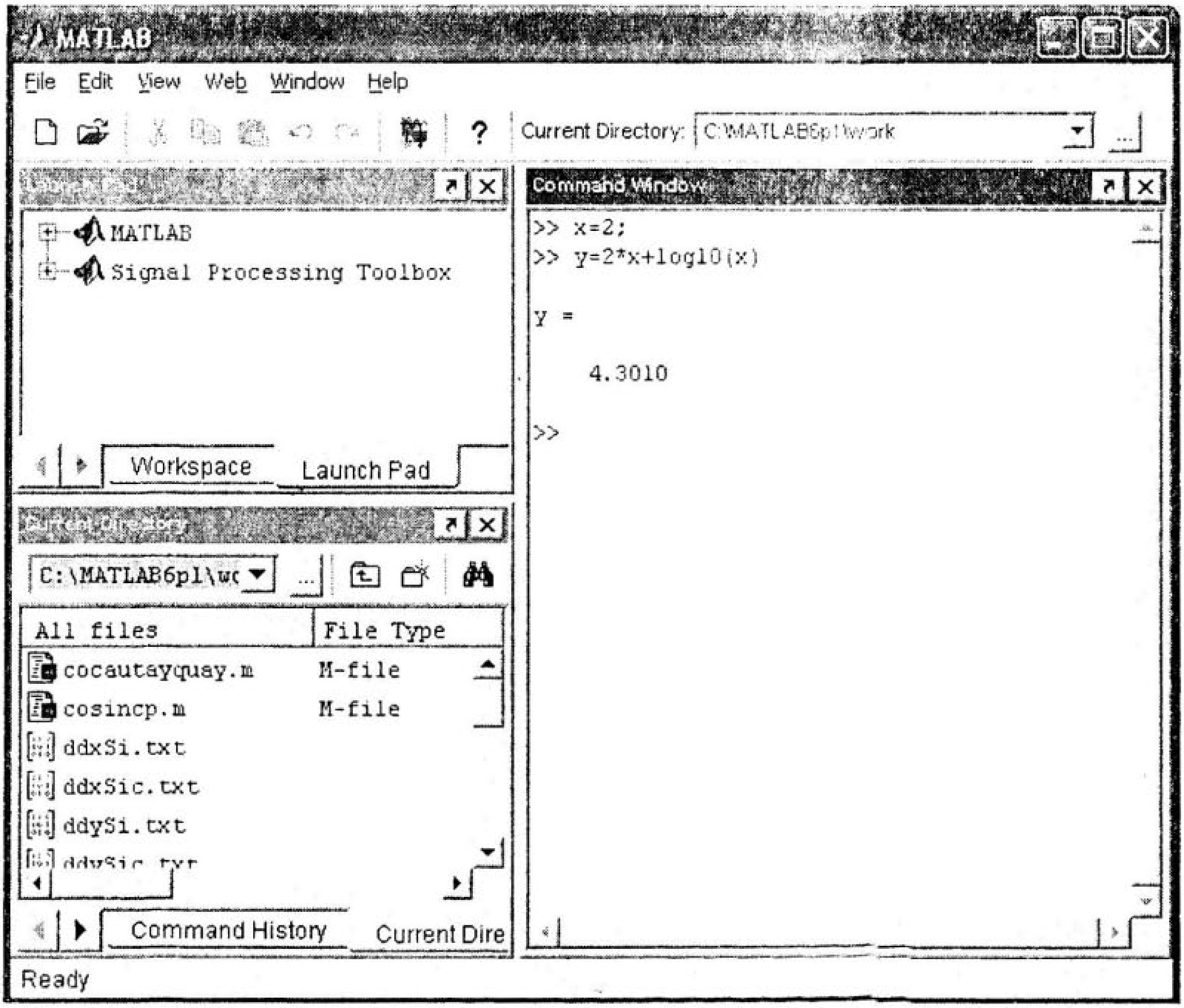
MATHCAD xuất kết quả dưới dạng số, dữ liệu dạng bảng, các biểu thức toán học bằng chữ (*symbolic*) và đồ thị. Tuy nhiên tính năng xử lý *symbolic* của MATHCAD không mạnh so với hệ chương trình MAPLE. Bạn đọc có thể tìm hiểu việc xuất kết quả của MATHCAD trong các thí dụ.

4.1.3 Cơ sở về MATLAB

MATLAB (tên viết tắt của từ MATrix LABoratory) là một hệ chương trình hàng đầu trong lĩnh vực toán số. MATLAB là sản phẩm chính của hãng Mathworks. Hãng được thành lập vào năm 1984 và có trụ sở chính tại Massachusetts (Mỹ). Tên của phần mềm MATLAB đã thể hiện định hướng chính của hệ chương trình là các phép tính trên ma trận. Phiên bản gần đây nhất là MATLAB 7.0 (năm 2004). MATLAB có tính năng đồ họa tiên tiến, đa dạng và dễ sử dụng. Hệ thống các hàm toán học của MATLAB được mở rộng thông qua các thư viện trợ giúp (các bộ công cụ - *Toolbox*). Bên cạnh khả năng nhập lệnh trực tiếp trong môi trường MATLAB, người sử dụng có thể soạn thảo và lưu cất nhiều câu lệnh của MATLAB dưới dạng tệp văn bản với ký tự ASCII (gọi là *scrift file*). Các thông tin về hệ chương trình này được đăng tải trên địa chỉ:

http://www.mathworks.com.

- **Trang làm việc của MATLAB**



Hình 4.7: Trang làm việc (cửa sổ chính) của MATLAB

Môi trường làm việc của MALAB được thiết kế với một giao diện đồ hoạ rất tiện dụng và cung cấp tối đa các thông tin liên quan đến: thư mục đang làm việc (*Current Directory*), dung lượng bộ nhớ của các biến (*Workspace*), lưu trữ và hiển thị các câu lệnh đã sử dụng (*Command History*), truy cập nhanh chóng tới các công cụ sẵn có như các Toolbox hoặc tiện ích trợ giúp (*Launch Pad*). Những thông tin này giúp cho người sử dụng kiểm soát quá trình tính toán và nhanh chóng hiệu chỉnh, sửa chữa các lỗi xuất hiện.

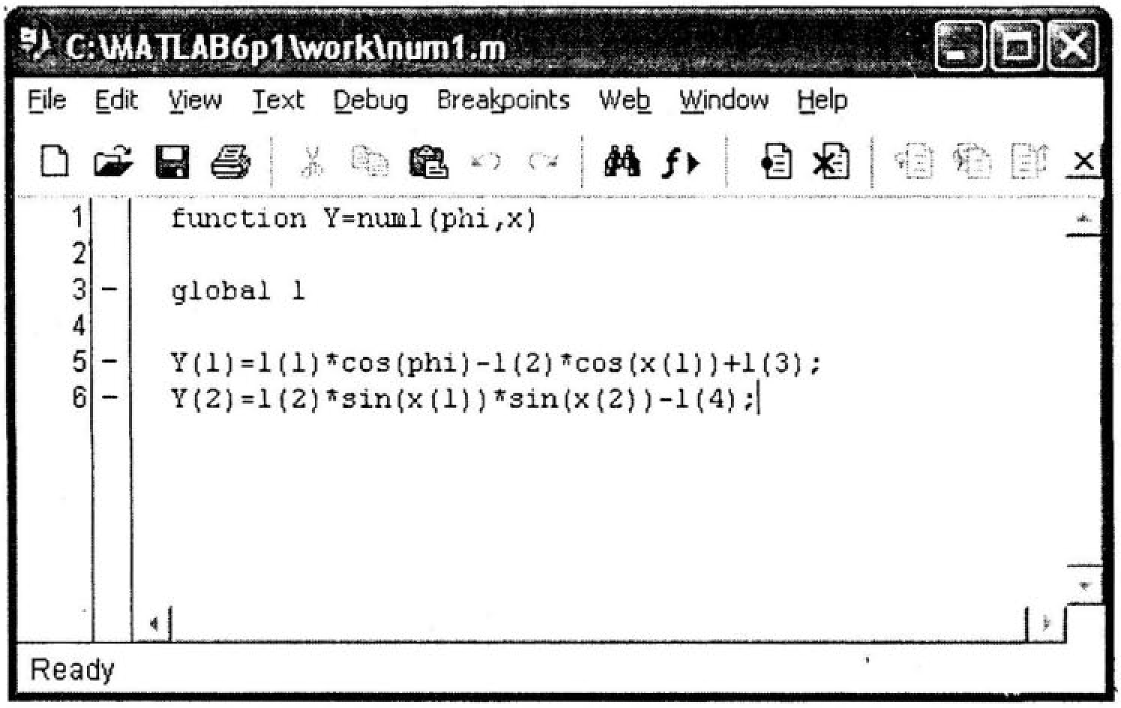
Tương tự như hệ chương trình MAPLE, MATLAB tuân thủ nguyên tắc tính toán và xác lập các giá trị của biến theo trình tự từng dòng lệnh từ trên xuống dưới chương trình. Các câu lệnh được nhập sau dấu nhắc >>. Mỗi câu lệnh được kết thúc bằng dấu chấm phẩy (;) (nếu ta không muốn MATLAB hiển thị kết quả) hoặc để trống sau câu lệnh (MATLAB hiển thị kết quả tính toán ngay sau khi nhấn phím ENTER).

Tiện ích trợ giúp trực tuyến (menu *Help*) của MATLAB trên cơ sở phân loại theo chủ đề cũng rất chi tiết và dễ tra cứu. Ngoài ra, trên cửa sổ chính của MATLAB, ta cũng có thể xem chức năng của một câu lệnh thông qua việc nhập: `help` [*tên lệnh*], thí dụ:

```
>>help ode45
```

- **Soạn thảo Scrift File với MATLAB-Editor**

Bên cạnh khả năng nhập lệnh trực tiếp trên cửa sổ chính của MATLAB, ta có thể nhập và lưu cất nhiều câu lệnh với các ký tự ASCII trong một file có phần mở rộng của tên file là (*.*m*). Các file này được gọi là các *scrifts* của MATLAB. Để soạn thảo các scrift file, MATLAB có một chương trình riêng với nhiều tính năng giống như một chương trình soạn thảo văn bản thông thường. Trên hình 4.8 là chương trình soạn thảo của MATLAB (MATLAB-Editor). Ta có thể gọi chương trình này bằng cách kích hoạt trên của sổ chính của MATLAB tại menu `File/New/M-file`.



Hình 4.8: MATLAB -Editor

MATLAB sẽ tự động tính toán toàn bộ chương trình được soạn thảo và lưu trong scrift file nếu ta nhập tên của file (không có phần mở rộng) trên dấu nhắc lệnh. Chú ý rằng đường dẫn đến thư mục chứa file này phải được khai báo trong môi trường MATLAB (chọn menu `File/Set Path...`).

- **Biến và hàm trong MATLAB**

Giống như các ngôn ngữ lập trình khác, MATLAB phân loại biến thành hai dạng: Biến cục bộ (*local variable*) và biến toàn cục (*global variable*). Các biến toàn cục được khai báo sau lệnh `global` [tên biến] và được xoá khỏi môi trường tính toán bằng lệnh `clear` [tên biến]. Biến cục bộ được sử dụng trong các hàm và không được liệt kê trong cửa sổ *Workspace*. Các biến có thể là các véc tơ, các ma trận hoặc các mảng nhiều chiều (định nghĩa bởi lệnh `cell`). Việc thực hiện các phép toán đối với ma trận trong môi trường MATLAB được thực hiện bởi một tập hợp các lệnh phong phú. Bảng 4.4 liệt kê một số câu lệnh thường được sử dụng khi tính toán.

Bảng 4.4

Tên lệnh	Chức năng
`zeros(n)`	Định nghĩa một ma trận vuông cỡ n gồm các phần tử bằng 0
`eye(n)`	Định nghía một ma trận đơn vị cỡ n
`size(M)`	Xác định số hàng và số cột của ma trận **M**
`det(M)`	Tính định thức của ma trận **M**
`inv(M)`	Tính ma trận nghịch đảo
`eig(M)`	Tính trị riêng và véc tơ riêng của ma trận

Một dạng đặc biệt của scrift files là các *hàm* của MATLAB. Các hàm này được khai báo sau từ khoá `function` (xem hình 4.8). Các hàm có thể được sử dụng trong các scrift file khác (tham khảo thêm tại các thí dụ trong mục 4.2).

- **Các Toolbox của MATLAB**

Các *Toolbox* (các bộ công cụ) chính là phần mở rộng của MATLAB cho các bài toán thuộc các lĩnh vực khoa học khác nhau. Các Toolbox có chức năng giống như các gói chương trình (*Pakages*) của MAPLE. Tuy nhiên, trong khi các gói chương trình được tích hợp ngay trong hệ chương trình MAPLE, các Toolbox của MALAB được coi là các sản phẩm phần mềm riêng. Mỗi Toolbox gồm một tập hợp các hàm được lập trình sẵn trong các M-file và được lưu trong một thư mục riêng. Thí dụ như:

- *Signal Processing Toolbox*: Công cụ xử lý tín hiệu số.
- *Optimization Toolbox*: Công cụ tính toán tối ưu
- *Control System Toolbox*: Công cụ thiết kế các hệ thống điều khiển.

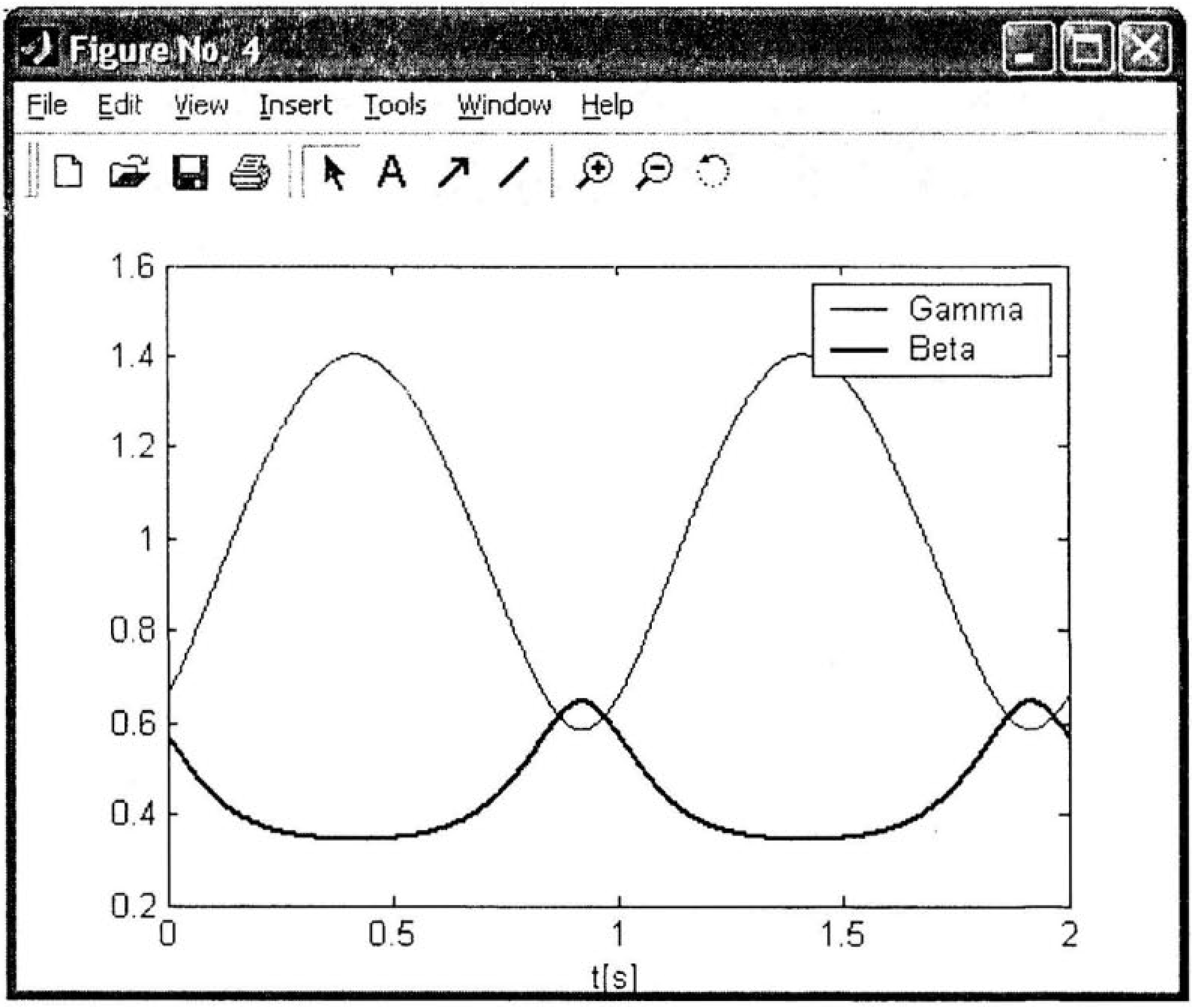
- **Tính năng đồ hoạ của MATLAB**

MATLAB có tính năng đồ hoạ tiên tiến vào loại bậc nhất trong số các hệ chương trình tính. Thông thường, các đồ thị được biểu diễn trên một cửa sổ riêng biệt (cửa sổ đồ hoạ – hình 4.9). Các cửa sổ này được hiển thị khi sử dụng lệnh:

```
>>figure;
```

Trong cửa sổ đồ hoạ có chứa một số công cụ với chức năng chèn, xoá, thay đổi, định dạng các phần tử của một đồ thị hiện có như: kiểu đường, tiêu đề, các chú thích, màu sắc vv....

MALAB cho phép biểu diễn kết quả tính toán dưới nhiều dạng đồ thị: Dạng hai chiều thông thường với lệnh `plot` (hình 4.9), dạng các đường mức (lệnh `contour`), các đồ thị ba chiều (các lệnh `surf`, `mesh`, `pcolor`),... Các lệnh vẽ này được hướng dẫn chi tiết trong phần trợ giúp *Help* của MATLAB.



Hình 4.9: Cửa sổ đồ hoạ của MATLAB

Trong phạm vi của chương này, chúng tôi sử dụng các hệ chương trình MATLAB, MAPLE và MATHCAD để tính toán tần số riêng, dạng riêng của hệ dao động và tính toán bằng số nghiệm của phương trình vi phân dao động.

4.2 Tính toán dao động của hệ một bậc tự do chịu kích động tùy ý

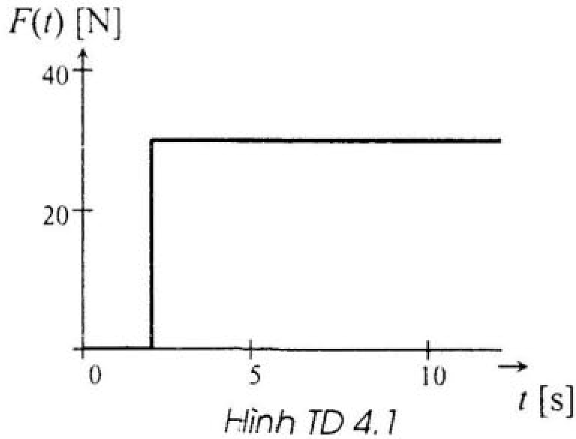
Thí dụ 4.1 Phương trình vi phân dao động của hệ dao động có dạng:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$$

với m = 100 (kg), b = 63 (Ns/m), c=1000 (N/m). Biết lực $F(t)$ có dạng hàm bước nhảy như hình TD 4.1

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t_0 > t \geq 0 \\ F_0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

với t_0=2 (s) và F_0= 30 (N)



Hình TD 4.1

Cho biết biểu thức giải tích của nghiệm $x(t)$ khi $t > t_0$:

$$x(t) = \frac{F_0}{c} - \frac{F_0}{c\sqrt{1-D^2}}\, e^{-D\omega_0(t-t_0)} \cos\left[\omega_d(t-t_0) - \theta\right]$$

Với D là độ cản Lehr, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$, $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ và $\theta = \arctan\dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}}$

Hãy xác định dao động của hệ bằng phương pháp số, sử dụng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE với điều kiện đầu $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ và so sánh kết quả tính với nghiệm giải tích.

Lời giải. Trước hết, ta biến đổi phương trình trên về hệ hai phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$. Ta thu được hệ phương trình sau:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{c}{m}y_1 - \frac{b}{m}y_2 + \frac{F(t)}{m}$$

Nếu sử dụng các đại lượng tần số riêng ω_0 và độ cản Lehr D, hệ phương trình trên được biểu diễn dưới dạng:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\omega_0^2 y_1 - 2D\omega_0 y_2 + \frac{F(t)}{m}$$

Chương trình tính với MATHCAD

$$F0 := 30 \quad c := 1000 \quad m := 100 \quad b := 63 \quad t0 := 2.0$$

$$\omega 0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad D := \frac{b}{2\cdot m\cdot \omega 0} \quad \theta := \mathrm{atan}\left(\frac{D}{1-D^2}\right) \quad \omega d := \omega 0\cdot\sqrt{1-D^2}$$

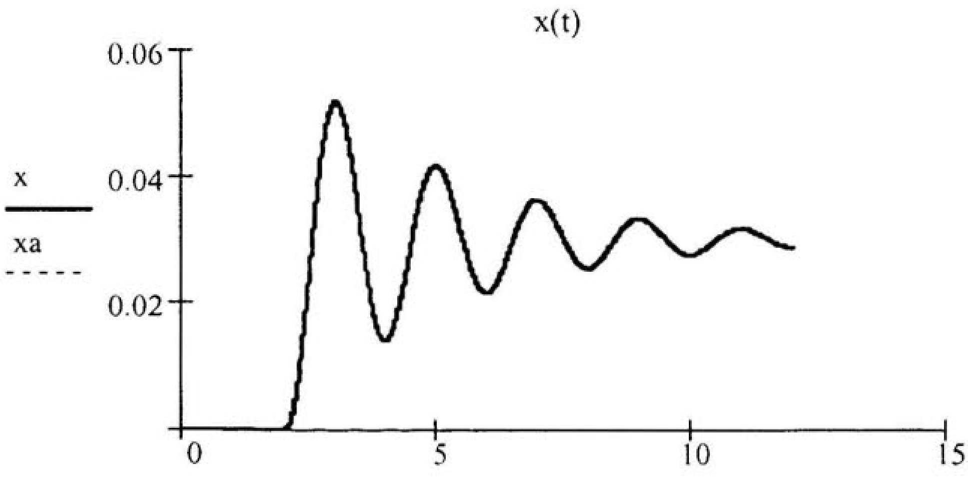
$$F(t) := F0\cdot\Phi(t-t0)$$

$$xa(t) := \frac{F(t)}{c} - \frac{F(t)}{c\cdot\sqrt{1-D^2}}\cdot e^{-D\cdot\omega 0\cdot(t-t0)}\cdot\cos\left[\omega d\cdot(t-t0)-\theta\right]$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -2\cdot D\cdot\omega 0\cdot y_1 - \omega 0^2\, y_0 + \dfrac{F(t)}{m} \end{pmatrix}$$

$$Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 12, 2000, A)$$

$$t := Z^{\langle 0\rangle} \quad x := Z^{\langle 1\rangle} \quad F := \overrightarrow{F(t)} \quad xa := \overrightarrow{xa(t)}$$



Hình TD 4.1: Kết quả tính toán với MATHCAD

Kết quả *x(t)* được biểu diễn trên đồ thị cho thấy và nghiệm tính toán bằng phương pháp số và với nghiệm giải tích là hoàn toàn phù hợp.

Chương trình tính với MATLAB

Hệ phương trình vi phân có tên **'dsys1'** được ghi lại dưới tên file **dsys1.m** được viết như sau:

```
function v = dsys1(t,y)
F0 = 30; c = 1000; m = 100; b = 63; t0 = 2;
w0=sqrt(c/m); D=b/(2*m*w0);
if t<t0, F=0; else F=F0; end
v=[y(2); y(2)*(-2*D*w0)+y(1)*(-w0^2)+F/m];
%--------------------------------------------------------
```

Chương trình chính là một *scrift file* có nội dung sau:

```
clear all;
% Nghiem giai tich ----------------------------------
F0=30; c=1000; m=100; b=63; t0=2; w0=sqrt(c/m); D=b/(2*m*w0);
theta=atan(D/(1-D^2)); wd=w0*sqrt(1-D^2); t=0:0.01:12;
for i=1:length(t)
 if t(i)<t0
 F(i)=0;
 else F(i)=F0; end;
xa(i)=F(i)/c-F(i)/(c*sqrt(1-D^2))*exp(-D*w0*(t(i)-t0))*cos(wd*(t(i)-t0)-theta);
end;
figure; plot(t,xa); hold on
%--------Tinh toan bang tich phan so ---------------
y0=[0;0]; ts=[0 12];
[t,y]=ode45('dsys1',ts,y0); % Giai he phuong trinh vi phan cap I
plot(t,y(:,1)); set(gca,'Xlim',[min(t) max(t)]); hold off
%------------------------------------------------------------------------------------
```

Chương trình tính với MAPLE

```
>restart;
>xa:=F/c-F/(c*sqrt(1-Dk^2))*exp(-Dk*w0*(t-t0))
      *cos(wd*(t-t0)-theta):
>eqt1:=diff(y1(t),t)=y2(t):
>eqt2:=diff(y2(t),t)=-2*Dk*w0*y2(t)-w0^2*y1(t)+F/m:
>F:=piecewise(t<=t0,0,t>=t0,F0):
>init:=y1(0)=0, y2(0)=0:
>F0:=30: c:=1000: b:=63: m:=100: t0:=2:
>w0:=sqrt(c/m): Dk:=b/(2*m*w0):
>theta:=arctan(Dk/(1-Dk^2)): wd:=w0*sqrt(1-Dk^2):
>dsys := {eqt1,eqt2,init}:
>dsol1 := dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
          output=listprocedure,range=0..12):
>with(plots):
>plot(xa,t=0..12,color=black,
      title="Nghiem giai tich"):
>odeplot(dsol1,[t,y1(t)],color=black);
```

Thí dụ 4.2 Phương trình vi phân dao động của hệ dao động có dạng:

$$20\ddot{x} + 40\dot{x} + 5000x = F(t)$$

Lực *F(t)* có dạng một hàm tuần hoàn chu kỳ *T*:

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{4}{T}t - 1 & 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ 1 - \dfrac{4}{T}\left(t - \dfrac{T}{2}\right) & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

Hãy tính toán biên độ dao động của hệ trong khoảng thời gian 2T với T = 4 (s) bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE, cho biết điều kiện đầu $x(0) = 0$ và $\dot{x}(0) = 0$.

Lời giải. Trước hết, ta biến đổi phương trình trên về hệ hai phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ (xem thí dụ 4.1). Với MAPLE ta có thể giải trực tiếp phương trình vi phân cấp 2.

Chương trình tính với MATHCAD

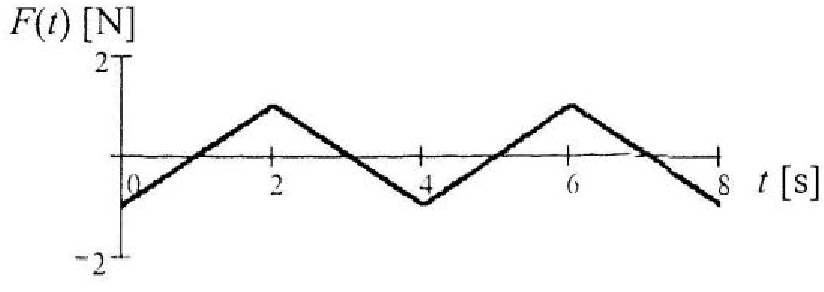
$c := 5000 \quad m := 20 \quad b := 40 \qquad \omega0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad \omega0 = 15.811$

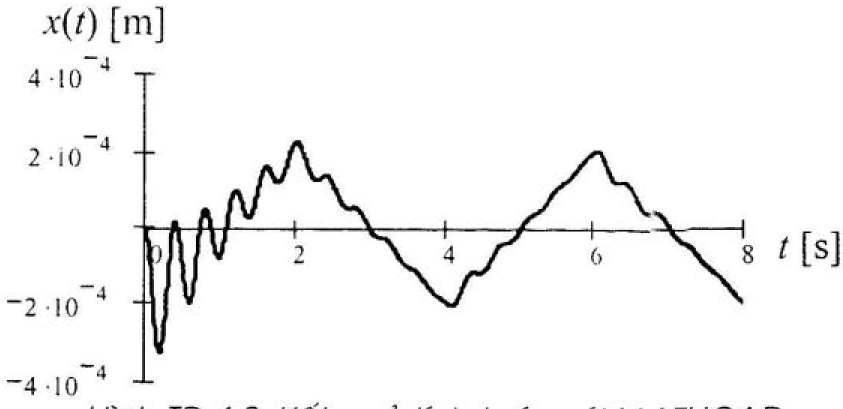
$T := 4.0 \quad \Omega := \frac{2\pi}{T} \qquad \Omega = 1.571$

$$F(t) := \begin{vmatrix} \frac{4}{T}\cdot t - 1 \ \text{ if } \ 0 \le t < \frac{T}{2} \\ 1 - \frac{4}{T}\cdot\left(t - \frac{T}{2}\right) \ \text{ if } \ \frac{T}{2} \le t \le T \\ \frac{4}{T}\cdot(t - T) - 1 \ \text{ if } \ T \le t \le \frac{3\cdot T}{2} \\ 1 - \frac{4}{T}\cdot\left(t - \frac{3T}{2}\right) \ \text{ if } \ \frac{3T}{2} \le t \le 2T \end{vmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} .0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -\frac{c}{m}\cdot y_0 - \frac{b}{m} y_1 + \frac{F(t)}{m} \end{pmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 8, 1000, A) \qquad t := Z^{\langle 0 \rangle} \qquad x := Z^{\langle 1 \rangle} \qquad F := \overrightarrow{F(t)}$





Hình TD 4.2: Kết quả tính toán với MATHCAD

Chương trình tính với MATLAB

Trước hết, ta khai báo hệ phương trình vi phân có tên **'dsys2'** và ghi lại dưới tên file **dsys2.m** với nội dung sau:

```
function v = dsys2(t,y)
c = 5000; m = 20; b = 40; w0 = sqrt(c/m); T = 4.0;
if t>=0 & t<T/2, F=4/T*t-1;
elseif t>=T/2 & t<=T, F=1-4/T*(t-T/2);
elseif t>=T & t<=3*T/2, F=4/T*(t-T)-1;
elseif t>=3*T/2 & t<=2*T, F=1-4/T*(t-3*T/2);
end;
v=[y(2); y(1)*(-c/m)+y(2)*(-b/m)+F/m];
```

Chương trình chính là một *scrift file* có nội dung sau:

```
clear all;
T=4.0; y0=[0;0]; ts=[0 2*T];
[t,y]=ode45('dsys2',ts,y0);
figure; plot(t,y(:,1)); title('Bien do dao dong');
set(gca,'Xlim',[min(t) max(t)]); grid on;
%--------------------------------------
```

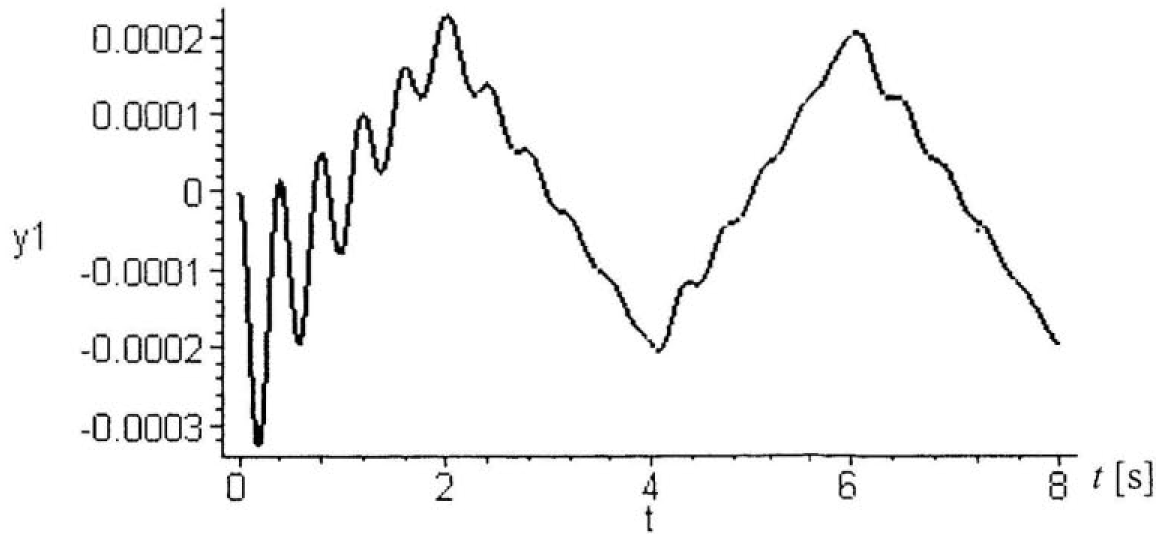
Chương trình tính với MAPLE

```
> restart;
> eqt:=m*diff(x(t),t,t)+b*diff(x(t),t)+c*x(t)=F;
```

$$eqt := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x(t)\right)+b\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)+c\,x(t)=F$$

```
> F:=piecewise(t>=0 and t<=T/2,4/T*t-1,t>=T/2
     and  t<=T,1-4/T*(t-T/2),t>=T
     and t<=3*T/2,4/T*(t-T)-1,t>=3*T/2
     and t<=2*T,1-4/T*(t-3*T/2)):
```

```
> init:=x(0)=0, D(x)(0)=0:
> c:=5000: b:=40: m:=20: T:=4.0:
> dsys := {eqt,init}:
> dsol1 := dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
          output=listprocedure, range=0..2*T):
> with(plots):
> odeplot(dsol1,[t,x(t)],color=black);
```



Hình TD 4.2: Kết quả tính toán với MAPLE

Thí dụ 4.3 Một hệ dao động một bậc tự do có thành phần độ cứng phi tuyến, chịu kích động bởi một lực $F = F_0$ trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + c_1x^3 = F(t)$$

Ban đầu hệ đứng yên, cho biết các giá trị: m = 100, b = 20, c = 2000, F_0 = 1500, t_1 =1.5, t_2 = 5. Hãy tính toán biên độ dao động của hệ bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE và so sánh kết quả trong hai trường hợp c_1 = 300 và $c_1 = 0$ (hệ tuyến tính).

Lời giải. Trước hết, ta biến đổi phương trình trên về hệ hai phương trình vi phân cấp 1 bằng cách đặt $y_1 = x,\ y_2 = \dot{x}$ (xem thí dụ 4.1).

Chương trình tính với MATHCAD

$m := 100 \quad b := 20 \quad c := 2000 \quad c1 := 300$

$F0 := 1500 \quad t1 := 1.5 \quad t2 := 5 \quad \omega 0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad D := \frac{b}{2m\cdot\omega 0}$

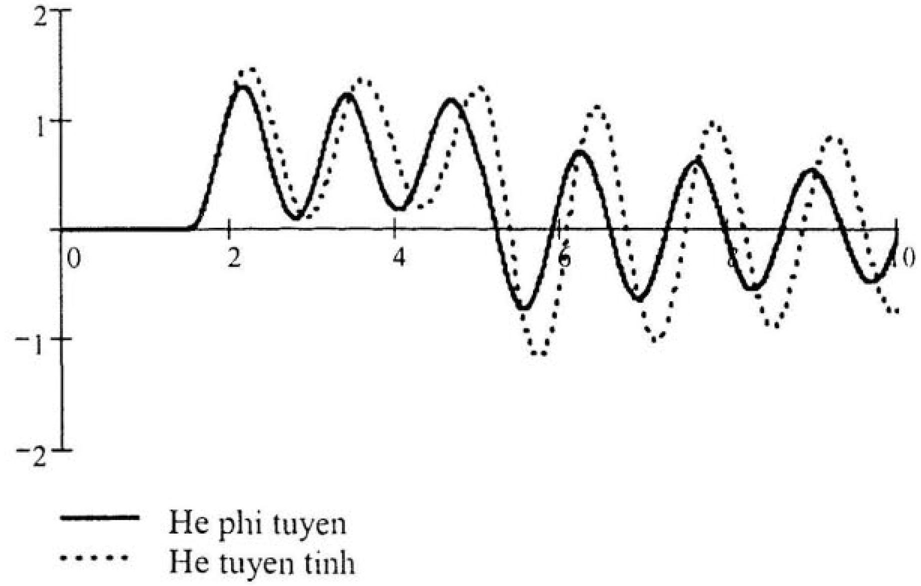
$F(t) := \frac{F0}{m}\cdot\Phi(t - t1) - \frac{F0}{m}\cdot\Phi(t - t2)$

$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A(t, X) := \begin{bmatrix} X_1 \\ -2\cdot D\cdot\omega 0\cdot X_1 - \omega 0^2 X_0 + F(t) - \frac{c1}{m}\cdot(X_0)^3 \end{bmatrix}$

$Y := X \quad L(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ -2\cdot D\cdot\omega 0\cdot Y_1 - \omega 0^2 Y_0 + F(t) \end{pmatrix}$

$z := \mathrm{rkfixed}(X, 0, 10, 2000, A) \quad w := \mathrm{rkfixed}(Y, 0, 10, 2000, L)$

$t := z^{\langle 0\rangle} \quad x := z^{\langle 1\rangle} \quad xlin := w^{\langle 1\rangle}$



Hình TD 4.3: Kết quả tính toán với MATHCAD

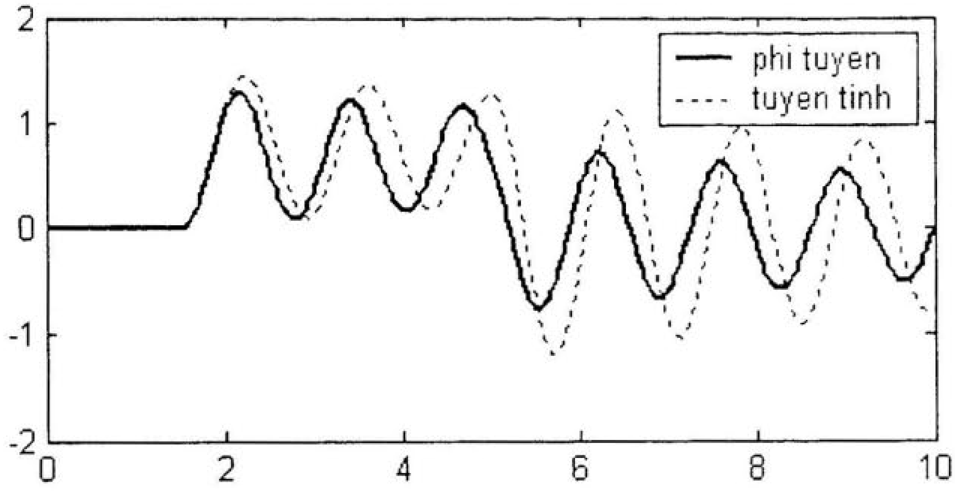
Chương trình tính với MATLAB

Nội dung của file khai báo hệ phương trình vi phân ứng với trường hợp phi tuyến (**dsys3.m**) và trường hợp tuyến tính (**dsys31.m**) như sau:

```
function v = dsys3(t,y)
F0=1500; c=2000; c1=300; m=100; b=20; t1=1.5; t2=5.0;
w0=sqrt(c/m); D=b/(2*m*w0);
if t>=t1&t<=t2, F=F0; else F=0; end
v=[y(2); y(2)*(-2*D*w0)+y(1)*(-w0^2)+F/m- c1/m*y(1)^3];
%----------------------------------------------------------------
function v = dsys31(t,y)
F0=1500; c=2000; m=100; b=20; t1=1.5; t2=5.0;
w0=sqrt(c/m); D=b/(2*m*w0);
if t>=t1&t<=t2, F=F0; else F=0; end
v=[y(2); y(2)*(-2*D*w0)+y(1)*(-w0^2)+F/m];
%----------------------------------------------------------------
```

Chương trình chính là một *scrift file* có nội dung sau:

```
clear all;
y0=[0;0]; ts=[0 10];
[ta,y1]=ode45('dsys3',ts,y0);
[tb,y2]=ode45('dsys31',ts,y0);
figure; plot(ta,y1(:,1));
hold on;
plot(tb,y2(:,1));
hold of;
set(gca,'Xlim',[min(t) max(t)]); xlabel('t [s]'); grid on
%-----------------------------------
```



Hình TD 4.3: Kết quả tính toán với MATLAB

Chương trình tính với MAPLE

```
> restart;
> eqt1:=diff(y1(t),t)=y2(t);
```

$$eqt1 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y1}(t) = \mathrm{y2}(t)$$

```
> eqt2:=diff(y2(t),t)=-c/m*y1(t)-b/m*y2(t)-
        c1/m*y1(t)^3+F/m;
```

$$eqt2 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{y2}(t) = -\frac{c\,\mathrm{y1}(t)}{m} - \frac{b\,\mathrm{y2}(t)}{m} - \frac{c1\,\mathrm{y1}(t)^3}{m} + \frac{F}{m}$$

```
> F:=piecewise(t>=t1 and t<=t2,F0,0):
> init:=y1(0)=0.0, y2(0)=0.0:
> c:=2000: b:=20: m:=100: F0:=1500: t1:=1.5:
> t2:=5.0:c1:=300:
> dsys := {eqt1,eqt2,init}:
> dsol3 := dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
          output=listprocedure, range=0..10):
> with(plots):
> odeplot(dsol3,[t,y1(t)]);
```

Thí dụ 4.4 Một hệ dao động chịu kích động điều hoà, có ma sát nhớt và ma sát khô. Phương trình vi phân của hệ có dạng:

$$\ddot{x} + 40\dot{x} + 0.98\,sign(\dot{x}) + 10000\,x = 10\sin(40t)$$

Hãy sử dụng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE để giải phương trình đã cho trong khoảng $0 \le t \le 1.5(s)$ với điều kiện đầu $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Hãy vẽ đồ thị kết quả $x(t)$ và quỹ đạo pha.

Lời giải. Trước tiên ta phải đưa phương trình vi phân cấp hai về hệ hai phương trình vi phân cấp một (xem thí dụ 4.1 và 4.2). Ta được phương trình sau:

$$\dot{y}_1 = y_2$$
$$\dot{y}_2 = -10000y_1 - 40y_2 - 0.98\,sign(y_2) + 10\sin(40t)$$

Chương trình tính với MATHCAD

$c := 10000 \quad m := 1 \quad b := 40 \quad \alpha := 0.98$

$F(t) := 10\cdot\sin(40\cdot t) \qquad y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

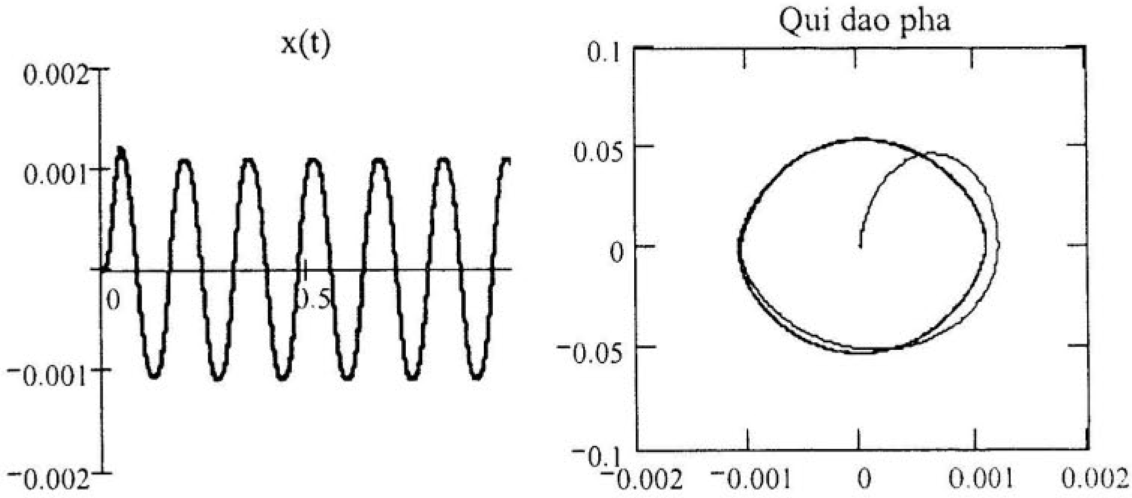
$$A(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -\dfrac{c}{m}\cdot y_0 - \dfrac{b}{m}\cdot y_1 - \dfrac{\alpha\cdot \mathrm{signum}(y_1)}{m} + \dfrac{F(t)}{m} \end{pmatrix}$$

$$A1(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -\dfrac{c}{m}\cdot y_0 - \dfrac{\alpha\cdot \mathrm{signum}(y_1)}{m} + \dfrac{F(t)}{m} \end{pmatrix}$$

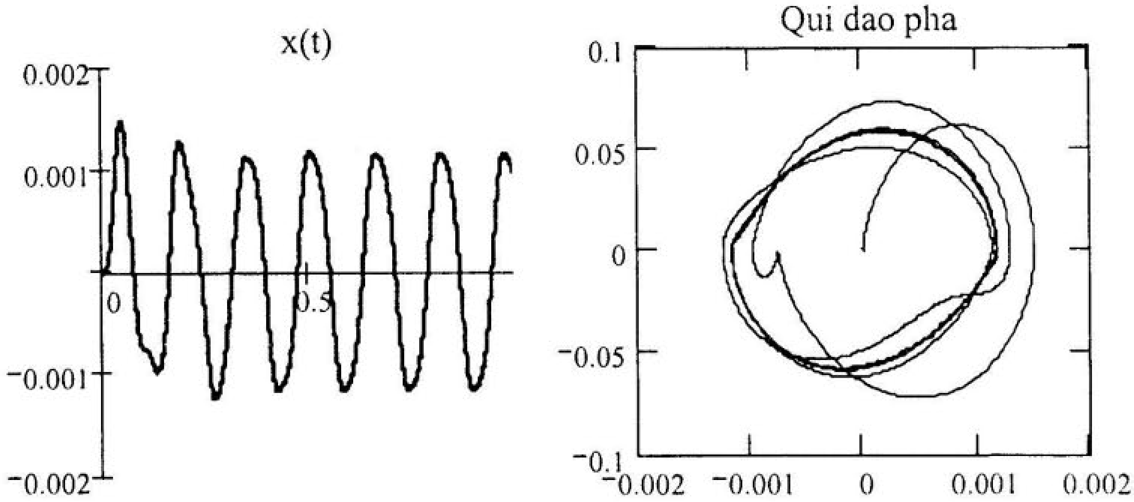
$Z := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 1, 2000, A)$

$Z1 := \mathrm{rkfixed}(y, 0, 1, 2000, A1)$

$t := Z^{\langle 0\rangle} \quad x1 := Z^{\langle 1\rangle} \quad x2 := Z^{\langle 2\rangle} \quad z1 := Z1^{\langle 1\rangle} \quad z2 := Z1^{\langle 2\rangle}$



Hình TD 4.4: Kết quả tính toán với MATHCAD
(trường hợp có ma sát khô và ma sát nhớt)



Hình TD 4.4: Kết quả tính toán với MATHCAD
(trường hợp chỉ có ma sát khô, không có ma sát nhớt)

Chương trình tính với MATLAB

Nội dung của file khai báo hệ phương trình vi phân cấp 1 (**dsys4.m**) như sau:

```
function v = dsys4(t,y)
c=10000; m=1; b=40; alpha=0.98;
F=10*sin(40*t);
v=[y(2); y(1)*(-c/m)+y(2)*(-b/m)-alpha*sign(y(2))/m+F/m];
%----------------------------------------
```

Chương trình chính là một *scrift file* có nội dung sau:

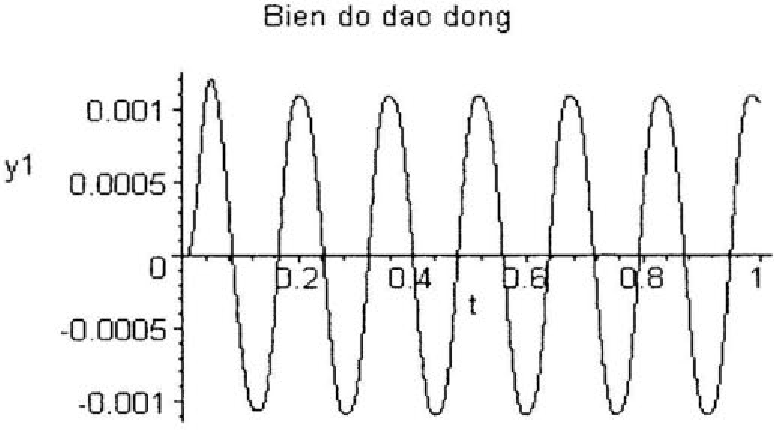
```
clear all;
y0=[0;0]; ts=[0 1];
[t,y]=ode45('dsys4',ts,y0);
figure; plot(t,y(:,1)); title('Bien do dao dong');
set(gca,'Xlim',[min(t) max(t)]);
xlabel('t [s]'); grid on
figure; plot(y(:,1),y(:,2)); title('Qui dao pha');
xlabel('x'); ylabel('dx/dt'); grid on
%--------------------------------------------------
```

Chương trình tính với MAPLE

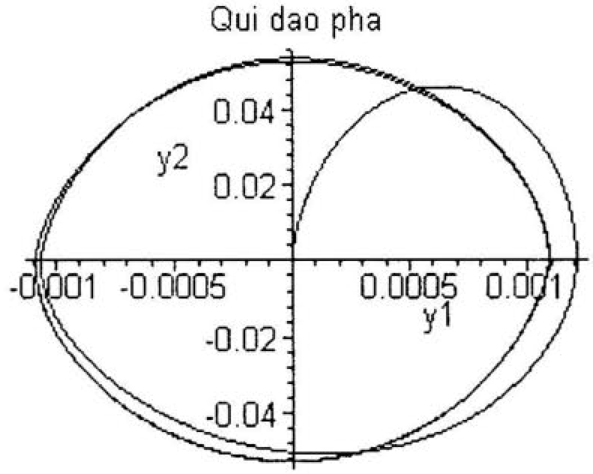
```
> restart;
> eqt:= m*diff(x(t),t,t)+b*diff(x(t),t)+c*x(t)
        +alpha*signum(diff(x(t),t))=10*sin(40*t);
```

$$eqt := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x}(t)\right) + b\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) + c\,\mathrm{x}(t) + \alpha\ \mathrm{signum}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x}(t)\right) = 10\sin(40\,t)$$

```
> init:=x(0)=0.0, D(x)(0)=0.0:
> c:=10000:alpha:=0.98: b:=40: m:=1:
> dsys := {eqt,init}:
> dsol := dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
          output=listprocedure, range=0..1):
> with(plots):
> odeplot(dsol,[t,x(t)],color=black,
         title="Bien do dao dong");
```




```
>odeplot(dsol,[x(t),diff(x(t),t)],
        color=black,title="Qui dao pha");
```



Hình TD 4.4: Kết quả tính toán với MAPLE
(trường hợp có ma sát khô và ma sát nhớt)

Thí dụ 4.5 Cho biết phương trình vi phân dao động của hệ dao động:

$$2\ddot{x} + 8\dot{x} + 400x = f(t)$$

trong đó hàm *f(t)* có dạng: $f(t) = \begin{cases} 4t & 0 \le t < 0.25 \\ -2t + 1.5 & 0.25 \le t < 0.5 \\ -t + 1 & 0.5 \le t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$

Hãy tính toán biên độ dao động của hệ bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE, cho biết điều kiện đầu $x(0) = 0$ và $\dot{x}(0) = 0$.

Lời giải. Giống như các ví dụ trước, ta phải đưa phương trình vi phân cấp hai đã cho về hệ hai phương trình vi phân cấp một (xem thí dụ 4.4).

Chương trình tính với MATHCAD

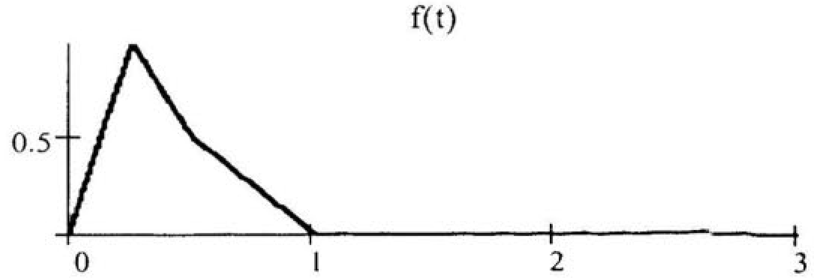
$c := 400 \quad m := 2 \quad b := 8 \quad \omega 0 := \sqrt{\frac{c}{m}} \quad \omega 0 = 14.142136$

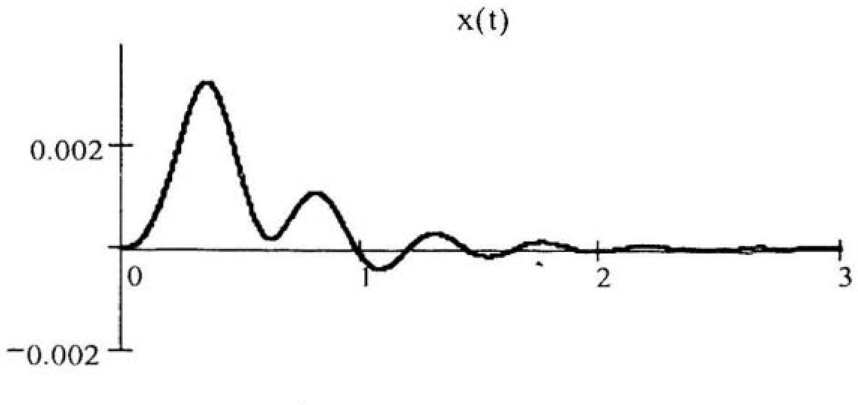
$$F(t) := \begin{vmatrix} 4\cdot t \ \text{ if } \ 0 \le t < 0.25 \\ -2\cdot t + 1.5 \ \text{ if } \ 0.25 \le t < 0.5 \\ -t + 1.0 \ \text{ if } \ 0.5 \le t < 1.0 \\ 0 \ \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

$$y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A(t,y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -\frac{c}{m}\cdot y_0 - \frac{b}{m} y_1 + \frac{F(t)}{m} \end{pmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 3, 2000, A)$

$t := Z^{\langle 0 \rangle} \quad x1 := Z^{\langle 1 \rangle} \quad x2 := Z^{\langle 2 \rangle} \quad F := \overrightarrow{F(t)}$





Hình TD 4.5: Kết quả tính toán với MATHCAD

Chương trình tính với MATLAB

Nội dung của file khai báo hệ phương trình vi phân cấp 1 (**dsys5.m**) như sau:

```
function v=dsys5(t,y)
c=400; m=2; b=8;
if t>=0 & t<0.25, F=4*t;
elseif t>=0.25 & t<0.5, F=-2*(t-0.25)+1.0;
elseif t>=0.5 & t<1.0, F=-(t-0.5)+0.5; else F=0; end;
v=[y(2); y(1)*(-c/m)+y(2)*(-b/m)+F/m];
%---------------------------------------
```

Chương trình chính là một *scrift file* có nội dung sau:

```
clear all;
y0=[0;0]; ts=[0 3];
[t,y]=ode45('dsys5',ts,y0);
figure; plot(t,y(:,1));
set(gca,'Xlim',[min(t) max(t)]); xlabel('t [s]'); grid on
%------------------------------------------------------------
```

Chương trình tính với MAPLE

```
> restart;
> eqt1:=diff(x1(t),t)=x2(t);
```

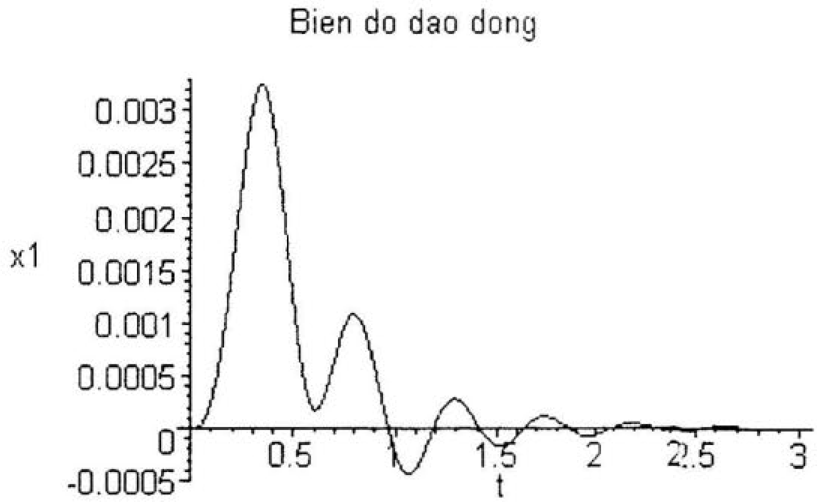
$$eqt1 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x1}(t) = \mathrm{x2}(t)$$

```
> eqt2:=diff(x2(t),t)=-c/m*x1(t)-b/m*x2(t)+F/m;
```

$$eqt2 := \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x2}(t) = -\frac{c\,\mathrm{x1}(t)}{m} - \frac{b\,\mathrm{x2}(t)}{m} + \frac{F}{m}$$

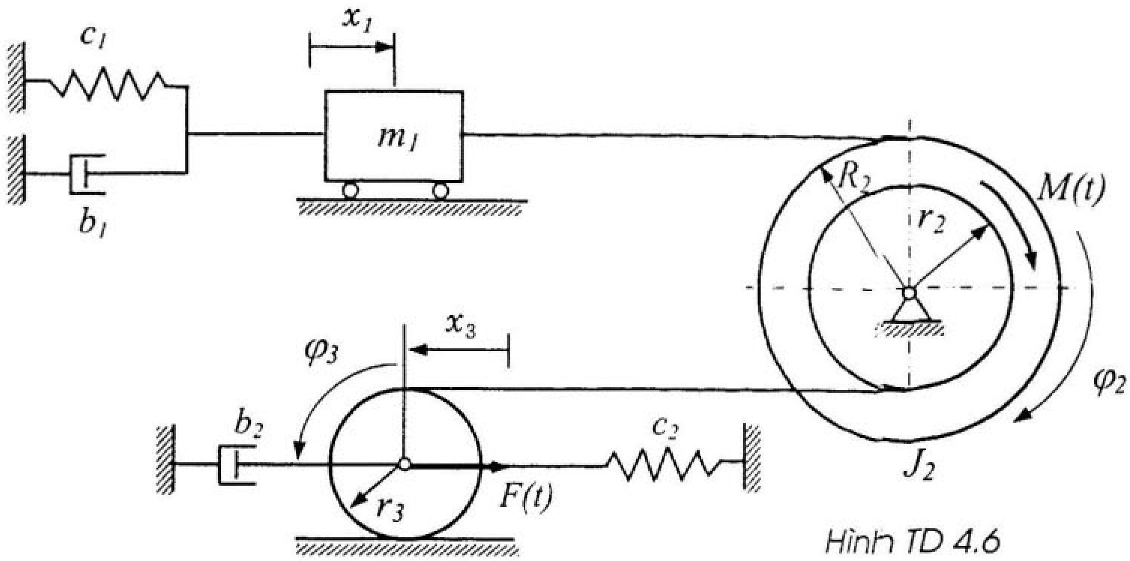
```
> F:=piecewise(t>=0 and t<=0.25,4*t,
               t>=0.25 and t<0.5,-2*(t-0.25)+1.0,
               t>=0.5 and t<1.0,-(t-0.5)+0.5,0):
```

```
> init:=x1(0)=0, x2(0)=0:
> c:=400: b:=8: m:=2:
> dsys := {eqt1,eqt2,init}:
> dsol1 := dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
                    output=listprocedure, range=0..3):
> with(plots):
> odeplot(dsol1,[t,x1(t)],color=black,
          title="Bien do dao dong");
```



Hình TD 4.5: Kết quả tính toán với MAPLE

Thí dụ 4.6 Khảo sát dao động tuyến tính của một hệ gồm ba vật rắn cho trên hình TD 4.6.



Hình TD 4.6

Hệ dao động chịu kích động bởi lực $F(t) = F_0 \sin\Omega t$ và một ngẫu lực có mô men $M(t) = M_0 \sin\Omega t$. Các tham số của hệ được ký hiệu trên hình vẽ, bao gồm: các khối lượng m_1 và m_3, mô men quán tính với trục quay của vật 2 là J_2, các bán kính r_2, R_2, r_3 độ cứng các lò xo c_1 và c_2, các hệ số cản b_1 và b_2. Vật 3 giả thiết là lăn không trượt trên nền ngang.

a) Hãy thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ theo toạ độ $x_1(t)$ của khối lượng m_1 với trợ giúp của hệ chương trình MAPLE.

b) Cho biết các giá trị: m_1 = 5 (kg), m_3 =15 (kg), J_2 = 3.60 (kgm^2), r_2 = 0.3 (m), R_2 = 0.6 (m), $c_1 = 2c_2$ = 1000 (N/m), b_1 = 4 (Ns/m), b_2 = 5 (Ns/m), F_0 = 10 (N), M_0 = 5 (Nm), Ω = 8.15 (1/s). Hãy tính toán biên độ dao động $x_1(t)$ của khối lượng m_1 bằng hệ chương trình MATLAB, giả thiết $x_1(0) = 0$ và $\dot{x}_1(0) = 0$.

Lời giải. a) Ta thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ theo toạ độ $x_1(t)$ bằng phương trình Lagrange II.

Động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{m_3 r_3^2}{2}\dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

Thế năng và hàm hao tán của hệ:

$$\Pi = \frac{1}{2}c_1 x_1^2 + \frac{1}{2}c_2 x_3^2$$

$$\Phi = \frac{1}{2}b_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}b_2\dot{x}_3^2$$

Từ hình vẽ ta xác định các quan hệ vận tốc và dịch chuyển của các vật như sau:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_1}{R_2},\ \dot{\varphi}_3 = \frac{r_2\dot{\varphi}_2}{2r_3} = \frac{r_2}{2r_3R_2}\dot{x}_1,\ \ \dot{x}_3 = r_3\dot{\varphi}_3 = \frac{r_2}{2R_2}\dot{x}_1$$

$$\varphi_2 = \frac{x_1}{R_2},\ x_3 = \frac{r_2}{2R_2}x_1$$

Cho hệ thực hiện di chuyển khả dĩ δx_1, $\delta\varphi_2$, δx_3, ta xác định được lực suy rộng ứng với các lực không có thế có dạng

$$Q^* = \frac{M(t)}{R_2} - \frac{r_2}{2R_2}F(t)$$

Với sự trợ giúp của hệ chương trình MAPLE, ta thiết lập được phương trình vi phân chuyển động của hệ:

$$m_{tg}\ddot{x}_1 + b_{tg}\dot{x}_1 + c_{tg}x_1 = \frac{1}{2R_2}(2M_0 - r_2F_0)\sin\Omega t$$

trong đó:

$$m_{tg} = m_1 + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{3r_2^2}{8R_2^2}m_3,\ b_{tg} = b_1 + b_2\frac{r_2^2}{4R_2^2},\ c_{tg} = c_1 + c_2\frac{r_2^2}{4R_2^2},$$

Chương trình tính với MAPLE

```
> restart;
```

[Biểu thức động năng

```
> T:=1/2*m1*v1^2+1/2*J2*omega2^2
      +1/2*m3*r3^2/2*omega3^2+1/2*m3*v3^2;
```

$$T := \frac{1}{2}m1\ v1^2 + \frac{1}{2}J2\ \omega2^2 + \frac{1}{4}m3\ r3^2\ \omega3^2 + \frac{1}{2}m3\ v3^2$$

[Thế năng và hàm hao tán

```
> PI:=1/2*c1*x1^2+1/2*c2*x3^2;
  Phi:=1/2*b1*v1^2+1/2*b2*v3^2;
```

$$\Pi := \frac{1}{2}c1\ x1^2 + \frac{1}{2}c2\ x3^2$$

$$\Phi := \frac{1}{2}b1\ v1^2 + \frac{1}{2}b2\ v3^2$$

[Lực suy rộng ứng với các lực không thế

```
> Qs:=M(t)/R2-r2/(2*R2)*F(t);
```

$$Qs := \frac{\mathrm{M}(t)}{R2} - \frac{1}{2}\frac{r2\ \mathrm{F}(t)}{R2}$$

[Các quan hệ vận tốc và dịch chuyển

```
> omega2:=v1/R2:omega3:=r2/(2*R2*r3)*v1:
  v3:=r2/(2*R2)*v1:x3:=r2/(2*R2)*x1:
```

[Tính toán các đạo hàm riêng và thế vào PT Lagrange II

```
> C:=diff(PI,x1):B:=diff(Phi,v1):
> A1:=diff(T,v1):v1:=diff(x1(t),t):A:=diff(A1,t):
```

```
M(t):=M0*sin(Omega*t):F(t):=F0*sin(Omega*t):
> PTVP:=collect(A,diff(x1(t),t,t))
        +collect(B,diff(x1(t),t))+collect(C,x1)=Qs;
```

$$PTVP := \left(m1 + \frac{J2}{R2^2} + \frac{\frac{3}{8}\, m3\, r2^2}{R2^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x1}(t)\right) + \left(b1 + \frac{\frac{1}{4}\, b2\, r2^2}{R2^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{x1}(t)\right) + \left(c1 + \frac{\frac{1}{4}\, c2\, r2^2}{R2^2}\right) x1 = \frac{M0 \sin(\Omega\, t)}{R2} - \frac{1}{2}\,\frac{r2\, F0 \sin(\Omega\, t)}{R2}$$

[Khối lượng thu gọn, hệ số cản thu gọn và độ cứng thu gọn

```
> mtq:=op([1,1,1],PTVP);
  btq:=op([1,2,1],PTVP);
  ctq:=op([1,3,1],PTVP);
```

$$mtq := m1 + \frac{J2}{R2^2} + \frac{\frac{3}{8}\, m3\, r2^2}{R2^2}$$

$$btq := b1 + \frac{\frac{1}{4}\, b2\, r2^2}{R2^2}$$

$$ctq := c1 + \frac{\frac{1}{4}\, c2\, r2^2}{R2^2}$$

b) Tính toán biên độ dao động x_1(t) bằng số.

Chương trình tính với MATLAB

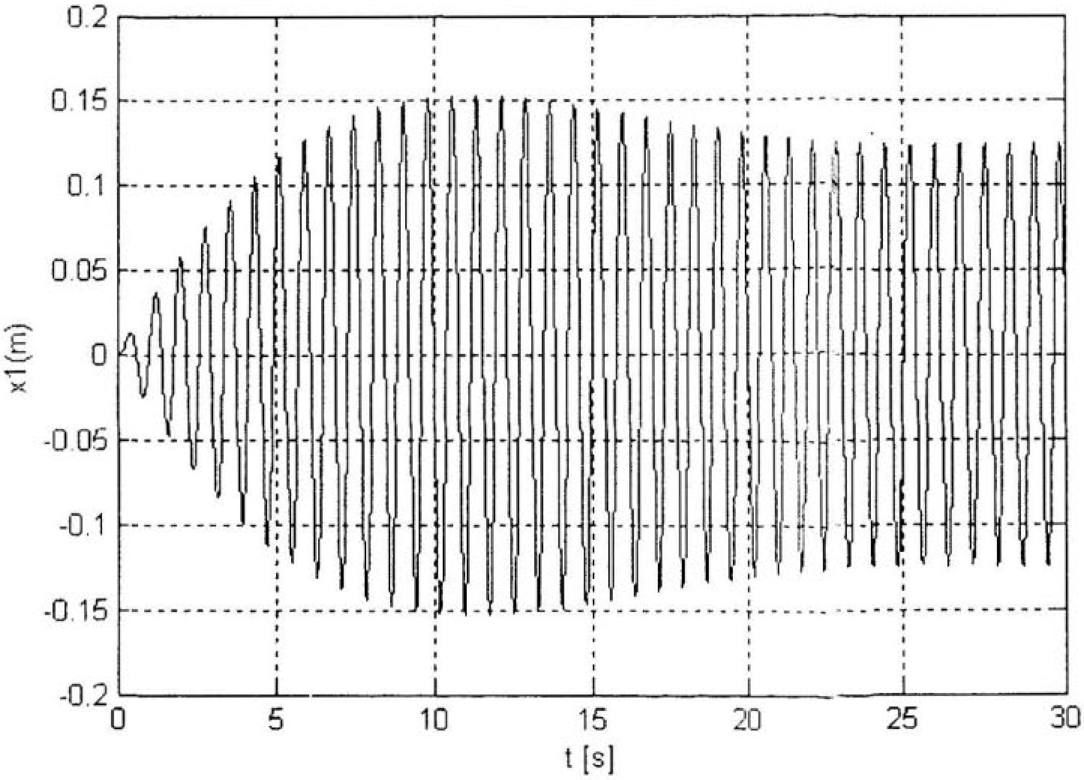
Hàm được lưu dưới tên file **dsys6.m** được soạn thảo như sau:

```
function v=dsys6(t,y)
c1=1000;c2=500;m1=5;m3=15;J2=3.60;r2=0.3;
R2=0.6;b1=4;b2=5;F0=10;M0=5;Omega=8.15;
mtg=m1+J2/R2^2+3*r2^2*m3/(8*R2^2);
btg=b1+r2^2*b2/(4*R2^2);
```

```
ctg=c1+r2^2*c2/(4*R2^2);
M=M0*sin(Omega*t);F=F0*cos(Omega*t);
Ftg=M/R2-F*r2/(2*R2);
v=[y(2); y(1)*(-ctg/mtg)+y(2)*(-btg/mtg)+Ftg/mtg];
%----------------------------------------
```

Chương trình chính là một *scrift file* có nội dung sau:

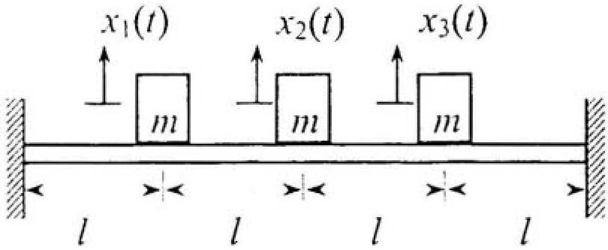
```
clear all;
y0=[0;0]; ts=[0 30];
[t,y]=ode45('dsys6',ts,y0);
figure; plot(t,y(:,1));
set(gca,'Xlim',[min(t) max(t)]); xlabel('t [s]'); grid on
%------------------------------------------------------------
```



Hình TD 4.6: Kết quả tính toán với MATLAB

4.3 Tính toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do

Thí dụ 4.7 Hình TD 4.7 biểu diễn một mô hình dao động của hệ gồm các máy đặt trên dầm có độ cứng *EI*. Cho biết phương trình vi phân dao động tự do của hệ có dạng:



Hình TD 4.7

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

với $\mathbf{C} = \dfrac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} \frac{9}{64} & \frac{1}{6} & \frac{13}{192} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{192} & \frac{1}{6} & \frac{9}{64} \end{bmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$

Biết các giá trị: m=200 (kg), $E = 6\times10^8$ N/m^2, $l = 2$ (m), $I = 4.17\times10^{-3}$ (m^4) và các điều kiện đầu $\mathbf{x}(0) = [0.1 \quad 0.0 \quad 0.0]^T$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$. Hãy xác định các tần số riêng, các dạng dao động riêng và tính toán biên độ dao động tự do của hệ bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE.

Lời giải. Trước hết ta biến đổi hệ phương trình đã cho về hệ các phương trình vi phân cấp một bằng cách đổi biến $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\dot{\mathbf{y}}_1(t) = \mathbf{y}_2(t)$$
$$\dot{\mathbf{y}}_2(t) = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\,\mathbf{y}_1(t)$$

với các điều kiện đầu: $\mathbf{y}_1(0) = \mathbf{x}(0)$ và $\mathbf{y}_2(0) = \dot{\mathbf{x}}(0)$.

Chương trình tính với MATHCAD

$$m := 200 \quad l := 2 \quad E := 0.6\cdot10^9 \quad I := 4.17\cdot10^{-3}$$

$$M := \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad C := \frac{E\cdot I}{l^3}\cdot\begin{pmatrix} \frac{9}{64} & \frac{1}{6} & \frac{13}{192} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{192} & \frac{1}{6} & \frac{9}{64} \end{pmatrix} \qquad A := M^{-1}\cdot C$$

Tính toán tần số riêng và dạng dao động riêng

$\Lambda := \text{eigenvals}(A)$ $\qquad$ $V1 := \text{eigenvecs}(A)$

$$V := \text{augment}\left(\frac{V1^{\langle 0\rangle}}{V1_{0,0}}, \frac{V1^{\langle 1\rangle}}{V1_{0,1}}, \frac{V1^{\langle 2\rangle}}{V1_{0,2}}\right) \qquad \omega 0 := \sqrt{\Lambda}$$

$$\omega 0 = \begin{pmatrix} 6.496 \\ 10.678 \\ 28.370 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ -1.088 & 0.000 & 1.838 \\ 1.000 & -1.000 & 1.000 \end{pmatrix}$$

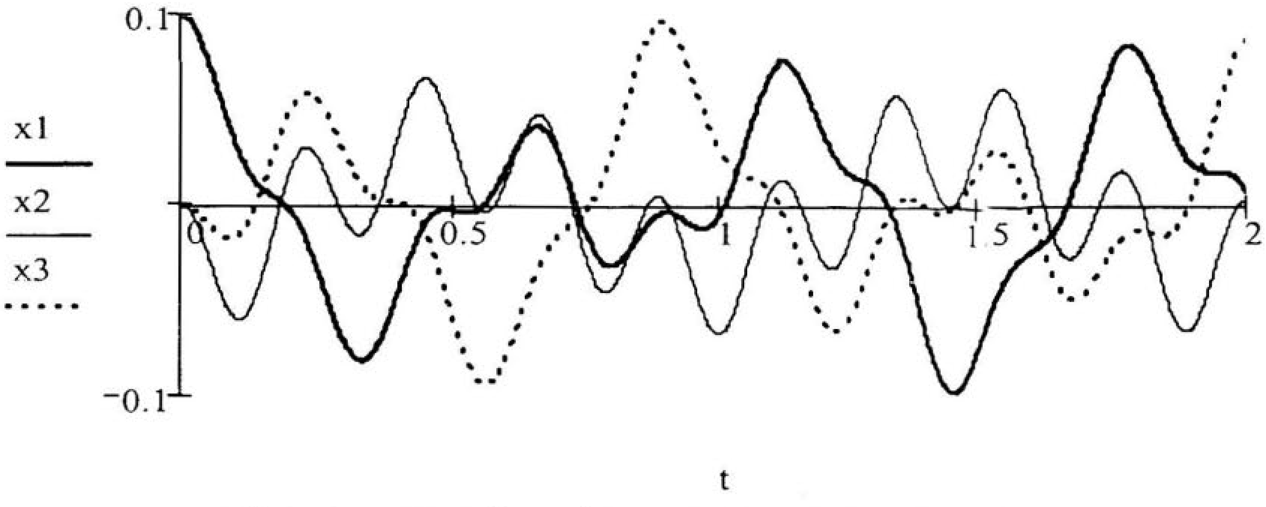
Tính toán dao động tự do

$$O := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad x := \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A := \text{augment}\left(\text{stack}\left(O, -M^{-1}\cdot C\right), \text{stack}(E, O)\right)$$

$D(t, x) := A\cdot x \qquad T := 2 \qquad N := 1024$

$z := \text{rkfixed}(x, 0, T, N, D) \qquad t := z^{\langle 0\rangle} \quad x1 := z^{\langle 1\rangle} \quad x2 := z^{\langle 2\rangle} \quad x3 := z^{\langle 3\rangle}$



Hình TD 4.7: Kết quả tính toán với MATHCAD

Chương trình tính với MATLAB

Khai báo hệ phương trình vi phân:

```
function v = dsys7(t,y)
m=200; E=6*10^8; I=4.17*10^-3; l=2;
M=diag([m,m,m]);
C=E*I/l^3*[9/64 1/6 13/192;1/6 1/3 1/6;13/192 1/6 9/64];
A=[zeros(3) eye(3);-inv(M)*C zeros(3)];
v=A*y;
%--------------------------------------- ------------------------
```

Chương trình chính:

```
clear all;
% Tinh toan tan so rieng va dang dao dong rieng
m=200; E=6*10^8; I=4.17*10^-3; l=2;
M=diag([m,m,m]);
C=E*I/l^3*[9/64 1/6 13/192;1/6 1/3 1/6;13/192 1/6 9/64];
A=inv(M)*C; [V,D]=eig(A);
omega1=sqrt(D(1,1))
omega2=sqrt(D(2,2))
omega3=sqrt(D(3,3))
% Chuan hoa cac vec to rieng:
V=[V(:,1)/V(1,1)  V(:,2)/V(1,2)  V(:,3)/V(1,3)]

% Tinh toan bien do dao dong
y0=[0.1;0;0;0;0;0]; ts=[0 2];
[t,y]=ode45('dsys7',ts,y0); figure; plot(t,y(:,1),t,y(:,2),t,y(:,3));
xlabel('t [s]'); legend('x1','x2','x3'); grid on;
%----------------------------------------------------------------
```

Chương trình tính với MAPLE:

Với MAPLE ta có thể giải trực tiếp hệ phương trình vi phân cấp 2

```
> restart;
> with(linalg):
> M:=diag(m,m,m):
> C:=EI/l^3*matrix([[9/64,1/6,13/192],
    [1/6,1/3,1/6],[13/192,1/6,9/64]]):
> M1:=multiply(inverse(M),C):
> X:=vector([x1(t),x2(t),x3(t)]):
> eqt:=matadd(multiply(M,map(diff,X,t,t)),
       multiply(C,X)):
> eqt1:=eqt[1];
```

$$eqt1 := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x1}(t)\right)+\frac{\frac{9}{64}\,EI\,\mathrm{x1}(t)}{l^3}+\frac{\frac{1}{6}\,EI\,\mathrm{x2}(t)}{l^3}+\frac{\frac{13}{192}\,EI\,\mathrm{x3}(t)}{l^3}$$

```
> eqt2:=eqt[2];
```

$$eqt2 := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x2}(t)\right)+\frac{\frac{1}{6}\,EI\,\mathrm{x1}(t)}{l^3}+\frac{\frac{1}{3}\,EI\,\mathrm{x2}(t)}{l^3}+\frac{\frac{1}{6}\,EI\,\mathrm{x3}(t)}{l^3}$$

```
> eqt3:=eqt[3];
```

$$eqt3 := m\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathrm{x3}(t)\right)+\frac{\frac{13}{192}\,EI\,\mathrm{x1}(t)}{l^3}+\frac{\frac{1}{6}\,EI\,\mathrm{x2}(t)}{l^3}+\frac{\frac{9}{64}\,EI\,\mathrm{x3}(t)}{l^3}$$

```
> init:=x1(0)=0.1, x2(0)=0.0,x3(0)=0.0,
        D(x1)(0)=0.0,D(x2)(0)=0.0,D(x3)(0)=0.0:
> m:=200:l:=2:EI:=(0.6*10^9)*(4.17*10^(-3)):
> Lambda:=evalf(Eigenvals(M1,vecs)):
  omega1:=evalf(sqrt(Lambda[1]),5);
  omega2:=evalf(sqrt(Lambda[2]),5);
  omega3:=evalf(sqrt(Lambda[3]),5);
```

$$\omega 1 := 6.4960$$

$$\omega 2 := 10.678$$

$$\omega 3 := 28.370$$

```
> v1 := submatrix(vecs, 1..3, 1..1)/vecs[1,1]:
> v2 := submatrix(vecs, 1..3, 2..2)/vecs[1,2]:
> v3 := submatrix(vecs, 1..3, 3..3)/vecs[1,3]:
> V:=evalf(augment(v1,v2,v3),5);
```

$$V := \begin{bmatrix} 1.0000 & .99999 & 1.0000 \\ -1.0881 & -.82704\,10^{-9} & 1.8381 \\ 1.0000 & -.99999 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

```
> dsys := {eqt1,eqt2,eqt3,init}:
> dsol := dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
          output=listprocedure, range=0..2):
> with(plots):
> odeplot(dsol,[[t,x1(t)],[t,x2(t)],[t,x3(t)]]);
```

Thí dụ 4.8 Cho biết phương trình vi phân dao động của hệ hai bậc tự do chịu kích động tuần hoàn có dạng:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

với $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4\sin(\Omega t) \\ \frac{1}{2}\sin(2\Omega t) \end{bmatrix}$

Ban đầu hệ đứng yên. Hãy tính toán dao động cưỡng bức của hệ với tần số kích động Ω = 2 (rad/s) bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB và MAPLE.

Lời giải. Trước hết ta biến đổi hệ phương trình vi phân cấp hai đã cho về hệ phương trình vi phân cấp một bằng cách đổi biến $\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}_2(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_1(t) &= \mathbf{y}_2(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(t) &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\,\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\,\mathbf{y}_2(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

Hệ phương trình (1) có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}.\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \qquad (2)$$

ong đó $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \end{bmatrix}$, với điều kiện đầu $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1(0) \\ \mathbf{y}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \dot{\mathbf{x}}(0) \end{bmatrix}$.

ương trình tính với MATHCAD

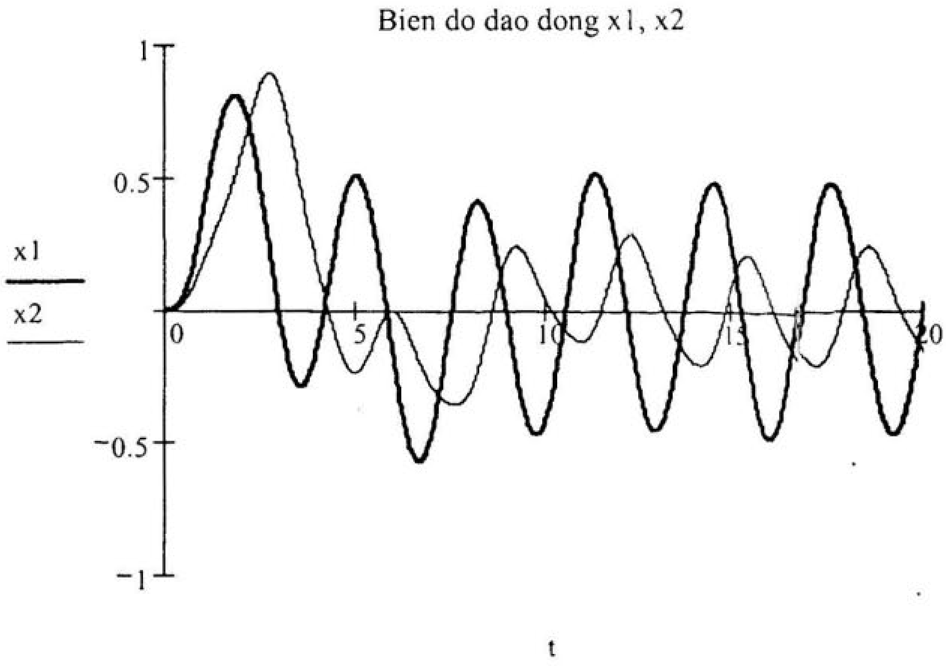
$:= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad O := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$:= 2 \qquad A := \text{augment}\left(\text{stack}\left(O, -M^{-1} \cdot C\right), \text{stack}\left(E, -M^{-1} \cdot B\right)\right)$

$h(t) := \text{stack}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4\sin(\Omega \cdot t) \\ 0.5\sin(2\Omega \cdot t) \end{pmatrix}\right] \qquad y := (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

$D(t, y) := A \cdot y + h(t)$

$z := \text{rkfixed}(y, 0, 20, 1000, D) \quad t := z^{\langle 0 \rangle} \quad x1 := z^{\langle 1 \rangle} \quad x2 := z^{\langle 2 \rangle}$



Hình TD 4.8: Kết quả tính toán với MATHCAD

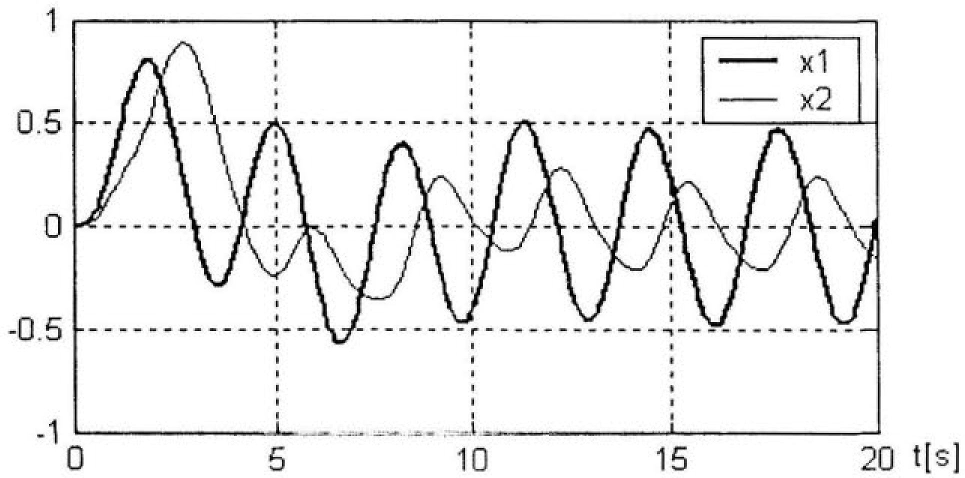
Chương trình tính với MATLAB

Khai báo hệ phương trình vi phân:

```
function v=dsys8(t,y)
M=diag([2,1]); C=[3 -1;-1 1];B=[3 -0.5;-0.5 0.5]
Omega=2; f=[4*sin(Omega*t);0.5*sin(2*Omega*t)];
h=[0;0;inv(M)*f]; A=[zeros(2) eye(2);-inv(M)*C -inv(M)*B ]; v=A*y+h;
%-----------------------------------------------------------
```

Chương trình chính:

```
clear all;
y0=[0;0;0;0]; ts=[0 20]; [t,y]=ode45('dsys8',ts,y0);
figure; plot(t,y(:,1),t,y(:,2)); xlabel('t [s]'); legend('x1','x2'); grid on
%-----------------------------------------
```



Hình TD 4.8: Kết quả tính toán với MATLAB

Chương trình tính với MAPLE

```
> restart;
> with(linalg):
> M:=diag(2,1):C:=matrix([[3,-1],[-1,1]]):
> B:=matrix([[3,-0.5],[-0.5,0.5]]):
> f:=vector([4*sin(Omega*t),0.5*sin(2*Omega*t)]):
```

```
> X:=vector([x1(t),x2(t)]):
> eqt:=evalm(multiply(M,map(diff,X,t,t))
        +multiply(B,map(diff,X,t))+multiply(C,X)):
> eqt1:=eqt[1]-f[1];
```

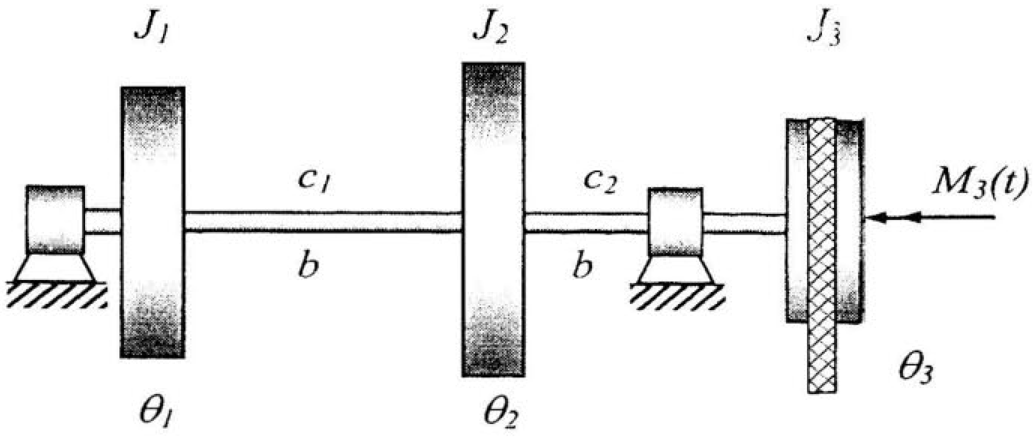
$$eqt1 := 2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x1(t)\right)+3\left(\frac{\partial}{\partial t}x1(t)\right)-.5\left(\frac{\partial}{\partial t}x2(t)\right)+3\,x1(t)-x2(t)-4\sin(\Omega\,t)$$

```
> eqt2:=eqt[2]-f[2];
```

$$eqt2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x2(t)\right)-.5\left(\frac{\partial}{\partial t}x1(t)\right)+.5\left(\frac{\partial}{\partial t}x2(t)\right)-x1(t)+x2(t)-.5\sin(2\,\Omega\,t)$$

```
> Omega:=2:
> init:=x1(0)=0.1, x2(0)=0.0,
        D(x1)(0)=0.0, D(x2)(0)=0.0:
> dsys:={eqt1,eqt2,init}:
> dsol:= dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
         output=listprocedure, range=0..20):
> with(plots):
> odeplot(dsol,[[t,x1(t)],[t,x2(t)]],
          legend=["x1", "x2"]);
```

Thí dụ 4.9 Khảo sát dao động xoắn của hệ rotor - gối đỡ được truyền động bởi bộ truyền dây đai cho trên hình TD 4.9.



Hình TD 4.9

Cho biết phương trình vi phân dao động của một hệ có dạng:

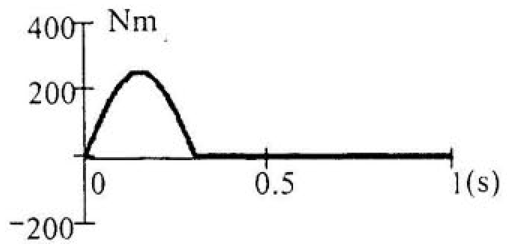
$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}}(t)+\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)+\mathbf{C}\boldsymbol{\theta}(t)=\mathbf{f}(t)$$

với $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b & -b & 0 \\ -b & 2b & -b \\ 0 & -b & b \end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{\theta}(t)=[\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$ và $\mathbf{f}(t)=[0 \;\; 0 \;\; M_3(t)]^T$

Mô men $M_3(t)$ được giả thiết có dạng hàm va chạm hình sin:

$$M_3(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ M_0\sin\dfrac{\pi t}{t_e} & 0\le t\le t_e \\ 0 & t>t_e \end{cases}$$



Cho biết các giá trị: $J_1=J_2=J_3=10$ (kgm^2), $c_1=c_2=10^3$ (N.m/rad), $b=2$ (N.m.s/rad), $M_0=250$ (Nm) và $t_e=0.3$ (s). Hãy tính toán tần số riêng của hệ và nghiệm $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$ bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB và MAPLE.

Lời giải. Trước hết ta biến đổi hệ phương trình vi phân cấp hai đã cho về hệ phương trình vi phân cấp một bằng cách đổi biến $\mathbf{y}_1(t)=\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}_2(t)=\dot{\mathbf{x}}(t)$ (xem thí dụ 4.8).

Chương trình tính với MATHCAD

$J := 10 \qquad c := 10^3 \qquad b := 2 \qquad c1 := c \qquad c2 := c1 \qquad te := 0.3 \qquad m0 := 250$

$$M := \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} c1 & -c1 & 0 \\ -c1 & c1+c2 & -c2 \\ 0 & -c2 & c2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} b & -b & 0 \\ -b & 2\cdot b & -b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}$$

$$O := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad m(t) := \begin{vmatrix} m0 \cdot \sin\left(\pi \cdot \dfrac{t}{te}\right) & \text{if } 0 \le t \le te \\ 0 & \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

$$A := \text{augment}\left(\text{stack}\left(O, -M^{-1} \cdot C\right), \text{stack}\left(E, -M^{-1} \cdot B\right)\right)$$

Tần số riêng

$$\lambda := \text{eigenvals}(A) \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -0.300 + 17.318i \\ -0.300 - 17.318i \\ 0.000 \\ -0.100 + 9.999i \\ -0.100 - 9.999i \\ 0.000 \end{pmatrix}$$

$$\omega 1 := |\lambda_2| \qquad \omega 2 := |\lambda_4| \qquad \omega 3 := |\lambda_0|$$

$$\omega 1 = 0.000 \qquad \omega 2 = 10.000 \qquad \omega 3 = 17.321$$

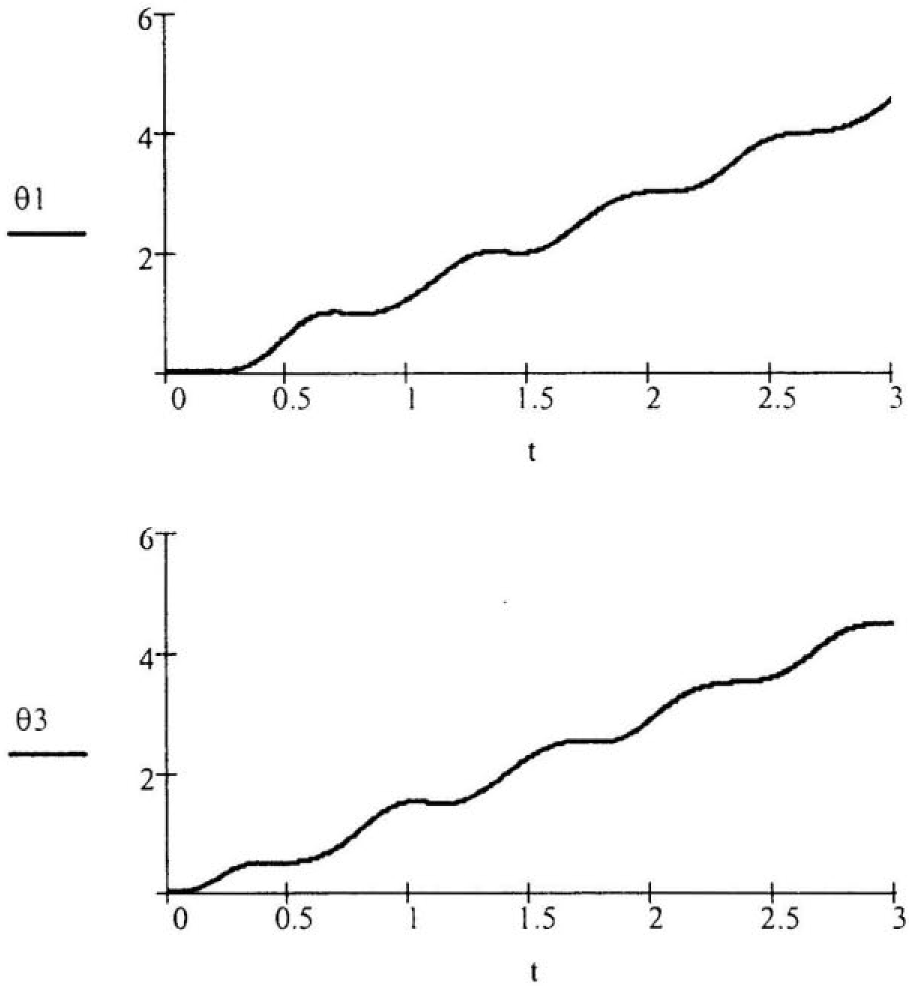
Giải phương trình vi phân dao động

$$h(t) := \text{stack}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m(t) \end{pmatrix}\right] \qquad y := (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$$

$$D(t, y) := A \cdot y + h(t) \qquad z := \text{rkfixed}(y, 0, 3, 1000, D)$$

$$t := z^{\langle 0 \rangle} \quad \theta 1 := z^{\langle 1 \rangle} \quad \theta 2 := z^{\langle 2 \rangle} \quad \theta 3 := z^{\langle 3 \rangle} \quad F := \overrightarrow{m(t)}$$

Từ đồ thị kết qủa ta thấy các góc quay θ_1, θ_2, θ_3 tăng lên theo thời gian t do chuyển động quay xung quanh trục của rotor, đồng thời xuất hiện các dao động bé xung quanh trạng thái bình ổn.



Hình TD 4.9: Kết quả tính toán với MATHCAD

Chương trình tính với MATLAB

Khai báo hệ phương trình vi phân:

```
function v=dsys9(t,y)
J=10; c=10^3; b=2;c1=c;c2=c;te=0.3;m0=250;
M=diag([J,J,J]); C=[c1 -c1 0;-c1 c1+c2 -c2;0 -c2 c2];
B=[b -b 0;-b 2*b -b;0 -b b];
if t>=0 &t<=te, F=m0*sin(pi*t/te); else F=0; end;
h=[0;0;0;inv(M)*[0;0;F]]; A=[zeros(3) eye(3);-inv(M)*C -inv(M)*B];
v=A*y+h;
%---------------------------------------
```

Chương trình chính:

```
clear all;
J=10; c=10^3; b=2;c1=c;c2=c;te=0.3;m0=250;
M=diag([J,J,J]);C=[c1 -c1 0;-c1 c1+c2 -c2;0 -c2 c2];
B=[b -b 0;-b 2*b -b;0 -b b];
A=[zeros(3) eye(3);-inv(M)*C -inv(M)*B];[V,D]=eig(A);
omega=sort([abs(D(1,1)) abs(D(3,3)) abs(D(5,5))]);
% Cac tan so rieng-----------------------------------------
omega1=omega(1), omega2=omega(2), omega3=omega(3)
y0=[0;0;0;0;0;0]; ts=[0 3]; [t,y]=ode45('dsys9',ts,y0);
figure; subplot(311);plot(t,y(:,1)); ylabel('theta 1')
subplot(312);plot(t,y(:,2)); ylabel('theta 2')
subplot(313);plot(t,y(:,3)); ylabel('theta 3'); xlabel('t [s]');
%-----------------------------------------------
```

Chương trình tính với MAPLE

```
> restart;
> with(linalg):
> M:=diag(J1,J2,J3):
> C:=matrix([[c1,-c1,0],[-c1,c1+c2,-c2],[0,-c2,c2]]):
> B:=matrix([[b,-b,0],[-b,2*b,-b],[0,-b,b]]):
> X:=vector([x1(t),x2(t),x3(t)]):
> eqt:=evalm(multiply(M,map(diff,X,t,t))
        +multiply(B,map(diff,X,t))+multiply(C,X)):
> eqt1:=eqt[1];
```

$$eqt1 := 10\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x1}(t)\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x1}(t)\right)-2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x2}(t)\right)+1000\mathrm{x1}(t)-1000\mathrm{x2}(t)$$

```
> eqt2:=eqt[2];
```

$$eqt2 := 10\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x2}(t)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x1}(t)\right) + 4\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x2}(t)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x3}(t)\right) - 1000\mathrm{x1}(t) + 2000\mathrm{x2}(t) - 1000\mathrm{x3}(t)$$

```
> eqt3:=eqt[3]-Mt;
```

$$eqt3 := J3\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{x3}(t)\right) - b\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x2}(t)\right) + b\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{x3}(t)\right) - c2\,\mathrm{x2}(t) + c2\,\mathrm{x3}(t) - Mt$$

```
> init:=x1(0)=0.1, x2(0)=0.0,x3(0)=0.0,
      D(x1)(0)=0.0,D(x2)(0)=0.0,D(x3)(0)=0.0:
> J:=10: c:=10^3: J1:=J: J2:=J: J3:=J:
  c1:=c: c2:=c: b:=2: M0:=250: te:=0.3:
> Mt:=piecewise(t>=0 and t<=te,M0*sin(Pi*t/te),0):
> M1:=multiply(inverse(M),C):
  M2:=multiply(inverse(M),B):
> Z:=matrix(3,3,0):
> E := matrix(3,3, [1,0,0,0,1,0,0,0,1]):
> A:=blockmatrix(2,2,[Z,E,-M1,-M2]):
> Lambda:=evalf(Eigenvals(A)):
> omega:=sort([abs(Lambda[1]),abs(Lambda[3]),
        abs(Lambda[5])]):
> omega1:=evalf(omega[1],1);
  omega2:=evalf(omega[2],5);
  omega3:=evalf(omega[3],5);
```

$$\omega 1 := .9\ 10^{-10}$$

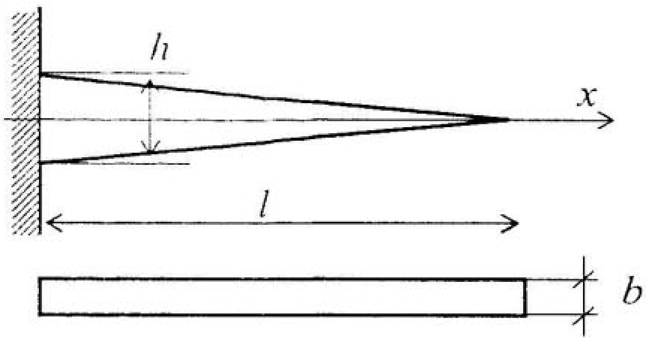
$$\omega 2 := 10.000$$

$$\omega 3 := 17.321$$

```
> dsys:={eqt1,eqt2,eqt3,init}:
> dsol:= dsolve(dsys,numeric,method=rkf45,
       output=listprocedure, range=0..3):
> with(plots):
> odeplot(dsol,[[t,x1(t)],[t,x2(t)],[t,x3(t)]],
       legend=["theta1", "theta2", "theta3"]);
```

4.4 Tính toán tần số riêng của hệ vô hạn bậc tự do

Thí dụ 4.10 Thanh thẳng đồng chất thiết diện biến đổi cho trên hình TD 4.10. Biết E = $2,1.10^5$ (N/mm²), $\rho = 7,85.10^{-6}$ (kg/mm³), $l = 400$ (mm). Hãy tính toán tần số riêng dao động dọc của thanh bằng các hệ chương trình MATHCAD, MAPLE.



Hình TD 4.10

a) Sử dụng tỷ số Rayleigh tìm tần số riêng cơ bản,

b) Sử dụng phương pháp Ritz tìm hai tần số riêng đầu tiên.

Lời giải. a) Tỷ số Rayleigh đối với dao động dọc của thanh có dạng:

$$\omega_R^2 = \frac{\int_0^l EA(x)X'^2(x)dx}{\int_0^l \rho A(x)X^2(x)dx} \quad (1)$$

Trong thí dụ này diện tích mặt cắt có dạng:

$$A(x) = hb\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) và sử dụng ký hiệu $c^2 = E/\rho$ ta được:

$$\omega_R^2 = c^2 \frac{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 X'^2(x)dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 X^2(x)dx} \quad (3)$$

Thực hiện phép đổi biến $x = l\xi$ ta có:

$$X'(\xi) = \frac{dX}{d\xi} = l\frac{dX}{dx} \quad (4)$$

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \Rightarrow f(\xi) = (1-\xi)^2 \tag{5}$$

Thế (4), (5) vào (3) ta được

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^1 f(\xi) X'^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 f(\xi) X^2(\xi) d\xi} \tag{6}$$

Trong đó : $$\lambda^2 = \frac{\omega^2 l^2}{c^2} \tag{7}$$

Đối với thanh dao động dọc như trên, ta chọn hàm $X(\xi)$ thỏa mãn điều kiện biên:

$$X(\xi) = \sin\frac{\pi}{2}\xi \tag{8}$$

b) Khi áp dụng phương pháp Ritz, ta chọn các hàm $X_1(\xi)$ và $X_2(\xi)$ có dạng như sau

$$X_1(\xi) = \sin\frac{\pi}{2}\xi, \quad X_2(\xi) = \sin\frac{3\pi}{2}\xi \tag{9}$$

Khi đó: $$X(\xi) = a_1 X_1(\xi) + a_2 X_2(\xi) \tag{10}$$

Các hàm $X_1(\xi)$ và $X_2(\xi)$ cùng thỏa mãn các điều kiện biên của bài toán. Dưới đây là mã nguồn các chương trình tính toán tần số riêng được lập trên môi trường MAPLE và MATHCAD.

Chương trình tính với MAPLE

```
[ Theo ty so Rayleigh
> restart:
> f:=(1-xi)^2;
```

$$f := (1-\xi)^2$$

```
> X:=sin(Pi/2*xi);
```

$$X := \sin\left(\frac{1}{2}\pi\,\xi\right)$$

```
> I1:=int(f*diff(X,xi)^2,xi=0..1):
> I2:=int(f*X^2,xi=0..1):
> lambda:=evalf(sqrt(I1/I2),5);
```

$$\lambda := 3.1811$$

```
> E:=2.1*10^5:rho:=7850*10^(-8):l:=400:
> omega:=evalf(sqrt(E/rho)*lambda/l,5);
```

$$\omega := 411.32$$

[Theo phuong phap Ritz

```
> restart:
> f:=(1-xi)^2;
```

$$f := (1-\xi)^2$$

```
> X[1]:=sin(Pi/2*xi);
  X[2]:=sin(3*Pi/2*xi);
```

$$X_1 := \sin\left(\frac{1}{2}\pi\,\xi\right)$$

$$X_2 := \sin\left(\frac{3}{2}\pi\,\xi\right)$$

```
> dX[1]:=diff(X[1],xi):dX[2]:=diff(X[2],xi):
> A:=array(1..2,1..2):B:=array(1..2,1..2):
> for i from 1 to 2 do
    for k from 1 to 2 do
    A[i,k]:=int(f*dX[i]*dX[k],xi=0..1);
    B[i,k]:=int(f*X[i]*X[k],xi=0..1);
    end do;end do;
> qlam:=evalf(Eigenvals(A,B)):
> lambda:=sort([sqrt(qlam[1]),sqrt(qlam[2])]);
```

$$\lambda := [3.146711311,\ 6.322085306]$$

```
> E:=2.1*10^5:rho:=7850*10^(-8):l:=400:
> omega1:=evalf(sqrt(E/rho)*lambda[1]/l,5);
  omega2:=evalf(sqrt(E/rho)*lambda[2]/l,6);
```

$$\omega 1 := 406.88$$

$$\omega 2 := 817.478$$

Chương trình tính với MATHCAD

Theo tỷ số Rayleigh

$E := 2.1\cdot 10^{5} \qquad \rho := 7850\cdot 10^{-8} \qquad l := 400$

$f(\xi) := (1-\xi)^2 \qquad X(\xi) := \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\xi\right)$

$$I1 := \int_0^1 f(\xi)\cdot\left(\frac{d}{d\xi}X(\xi)\right)^2 d\xi \qquad I2 := \int_0^1 f(\xi)\cdot(X(\xi))^2\, d\xi$$

$$\lambda := \sqrt{\frac{I1}{I2}} \qquad \lambda = 3.181 \qquad \omega 1 := \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \omega 1 = 411.324$$

Theo phương pháp Ritz

$$x(\xi) := \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\xi\right) \\ \sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\cdot\xi\right) \end{pmatrix} \qquad dx(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{d}{d\xi}x(\xi)_0 \\ \frac{d}{d\xi}x(\xi)_1 \end{pmatrix}$$

$$A := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..1 \\ \quad \text{for } k \in 0..1 \\ \quad\quad V_{i,k} \leftarrow \int_0^1 f(\xi)\cdot dx(\xi)_i\cdot dx(\xi)_k\, d\xi \\ V \end{array} \right. \qquad B := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..1 \\ \quad \text{for } k \in 0..1 \\ \quad\quad V_{i,k} \leftarrow \int_0^1 f(\xi)\cdot x(\xi)_i\cdot x(\xi)_k\, d\xi \\ V \end{array} \right.$$

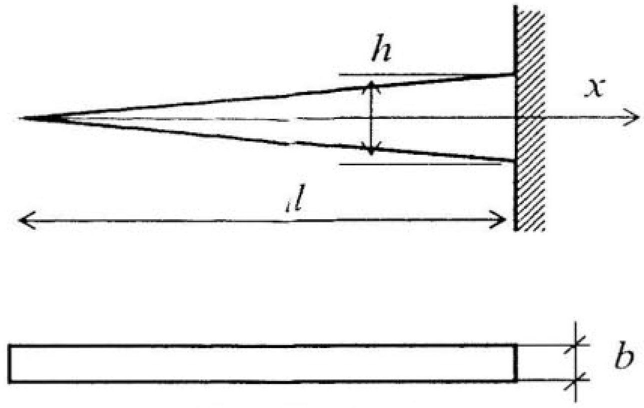
$$lq := \mathrm{sort}(\mathrm{genvals}(A,B)) \qquad \lambda := \begin{pmatrix} \sqrt{lq_0} \\ \sqrt{lq_1} \end{pmatrix} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} 3.147 \\ 6.322 \end{pmatrix}$$

$$\omega := \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad \omega = \begin{pmatrix} 406.885 \\ 817.476 \end{pmatrix}$$

Thí dụ 4.11 Dầm công xôn bằng thép đồng chất, có bề dày b không đổi cho trên hình TD 4.11. Biết $E = 2{,}1.10^5$ (N/mm²), $\rho = 7{,}85.10^{-6}$ (kg/mm³), l = 400 (mm), b = 20 (mm) và h = 70 (mm). Hãy tính toán tần số riêng dao động uốn của thanh bằng các hệ chương trình MATHCAD, MAPLE.

a) Sử dụng tỷ số Rayleigh tìm tần số riêng cơ bản,

b) Sử dụng phương pháp Ritz tìm hai tần số riêng dao động uốn đầu tiên.



Hình TD 4.11

Lời giải. a) Tỷ số Rayleigh đối với dao động uốn của thanh có dạng:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EI(x) f''^2(x)dx}{\int_0^l \mu(x) f^2(x)dx}, \tag{1}$$

trong đó $I(x)$ là mô men quán tính mặt, $\mu(x)$ là khối lượng trên một đơn vị dài của dầm:

$$I(x) = \frac{1}{12} bh^3 \left(\frac{x}{l}\right)^3, \quad \mu(x) = \rho bh \frac{x}{l} \tag{2}$$

Ta chọn đường cong uốn gần đúng của dầm thỏa mãn các điều kiện biên như sau:

$$f(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \tag{3}$$

b) Khi áp dụng phương pháp Ritz, ta chọn đường cong uốn gần đúng của dầm để thỏa mãn các điều kiện biên của bài toán:

$$f(x) = a_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a_2 \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \tag{4}$$

Dưới đây là mã nguồn các chương trình tính toán tần số riêng được lập trên môi trường MAPLE và MATHCAD.

Chương trình tính với MAPLE

```
[Theo ty so Rayleigh
> restart:
> f:=a1*(1-x/l)^2:
> EI:=E*1/12*b*h^3*(x/l)^3:
> mu:=rho*b*h*x/l:
> I1:=int( EI*diff(diff(f,x),x)^2, x=0..l ):
> I2:=int(mu*f^2,x=0..l):
> omega:=evalf(sqrt(I1/I2),5);
```

$$\omega := 1.5812\sqrt{\frac{E\,h^2}{l^4\,\rho}}$$

```
> E:=2.1*10^5:l:=400:b:=20:h:=70:rho:=7850*10^(-8):
> omega1:=evalf(omega,5);
```

$$\omega 1 := 35.779$$

```
[Theo phuong phap Ritz
> restart:
> f:=a1*(1-x/l)^2+a2*x/l*(1-x/l)^2:
> Ix:=1/12*b*h^3*(x/l)^3:
> mu:=rho*b*h*x/l:
> f1:=Ix*diff(diff(f,x),x)^2-omega^2/E*mu*f^2:
> Phi:=int(f1,x=0..l):
> A1:=diff(Phi,a1):
> A2:=diff(Phi,a2):
> B1:=collect(A1, [a1,a2]):
> B2:=collect(A2, [a1,a2]):
> B:=linalg[matrix](2,2,[[op(1,B1)/a1,op(2,B1)/a2],
                          [op(1,B2)/a1,op(2,B2)/a2]]):
> eq:=linalg[det](B)=0:
> omega:=evalf([solve(eq,omega)],5);
```

$$\omega := \left[4.9943\frac{h\sqrt{\rho\,E}}{\rho\,l^2},\ -4.9943\frac{h\sqrt{\rho\,E}}{\rho\,l^2},\ 1.5353\frac{h\sqrt{\rho\,E}}{\rho\,l^2},\ -1.5353\frac{h\sqrt{\rho\,E}}{\rho\,l^2}\right]$$

```
> E:=2.1*10^5:l:=400:b:=20:h:=70:rho:=7850*10^(-8):
> omega1:=evalf(omega[3],5);
  omega2:=evalf(omega[1],5);
```

$$\omega 1 := 34.742$$

$$\omega 2 := 113.02$$

Chương trình tính với MATHCAD

Theo tỷ số Rayleigh

$E := 2.1 \cdot 10^5 \quad \rho := 7850\,10^{-8} \quad l := 400 \quad b := 20 \quad h := 70$

$f(x) := \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \qquad I(x) := \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \left(\frac{x}{l}\right)^3 \qquad \mu(x) := \frac{\rho \cdot b \cdot h \cdot x}{l}$

$I1 := \int_0^l E \cdot I(x) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right)^2 dx \qquad I2 := \int_0^l \mu(x)\,(f(x))^2\,dx$

$\omega 1 := \sqrt{\frac{I1}{I2}} \qquad \omega 1 = 35.78$

Theo phương pháp Ritz

$f(x, a1, a2) := a1\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 + a2\,\frac{x}{l} \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2$

$f1(x, a1, a2, \omega) := I(x) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} f(x, a1, a2)\right)^2 - \frac{\omega^2}{E} \cdot \mu(x) \cdot f(x, a1, a2)^2$

$$\Phi(a1,a2,\omega) := \begin{bmatrix} \dfrac{d^2}{da1^2}\left(\displaystyle\int_0^l f1(x,a1,a2,\omega)\,dx\right) & \dfrac{d}{da2}\left(\dfrac{d}{da1}\displaystyle\int_0^l f1(x,a1,a2,\omega)\,dx\right) \\ \dfrac{d}{da1}\left(\dfrac{d}{da2}\displaystyle\int_0^l f1(x,a1,a2,\omega)\,dx\right) & \dfrac{d^2}{da2^2}\left(\displaystyle\int_0^l f1(x,a1,a2,\omega)\,dx\right) \end{bmatrix}$$

$ft(a1,a2,\omega) := |\Phi(a1,a2,\omega)|$

$\omega := 30$ (giá trị ban đầu)

$\omega 1 := root(ft(0,0,\omega),\omega)$ $\omega 1 = 34.99$ (kết quả tính toán)

$\omega := 110$ (giá trị ban đầu)

$\omega 2 := root(ft(0,0,\omega),\omega)$ $\omega 2 = 113.24$ (kết quả tính toán)

Bài tập chương 4

4.1 Sử dụng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE tìm nghiệm của các phương trình vi phân sau bằng phương pháp số:

a) $$3\ddot{x} + 6\dot{x} + 12x = 3\delta(t),$$

trong đó $\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$, điều kiện đầu: x(0) = 0.01 và $\dot{x}(0) = 1.0$

b) $$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = \sin t + \delta(t - \pi)$$

với điều kiện đầu: x(0) = 0, $\dot{x}(0) = 1.0$

4.2 Một hệ dao động cưỡng bức được mô tả bởi phương trình vi phân:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t)$$

Cho biết các giá trị: m = 100 (kg), b = 200 (kg/s), c = 2000 (N/m), $F(t) = 150\cos(10t) + 50\cos(20t)$. Hãy tính toán biên độ dao động cưỡng bức bình ổn *x(t)* bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE và so sánh kết qủa với nghiệm giải tích bằng đồ thị.

4.3 Hệ dao động tuyến tính một bậc tự do được mô tả bởi phương trình vi phân như bài tập 4.2. Cho biết các giá trị: m =10 (kg), b = 20 (kg/s) và

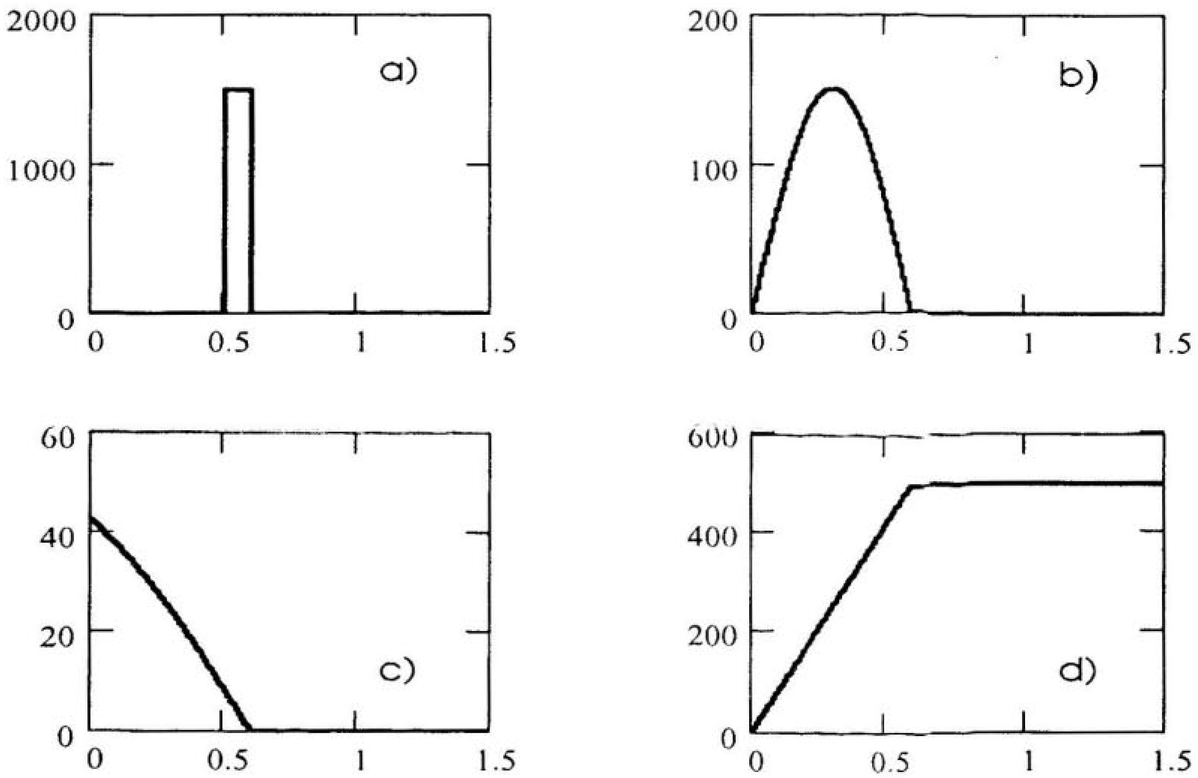
c = 5000 (N/m). Ban đầu hệ đứng yên. Hãy tính toán và biểu diễn trên đồ thị biên độ dao động ứng với các hàm kích động sau:

a) $F(t) = 1500$ N trong khoảng $t_1 \le t \le t_2$ với $t_1 = 0.5$ (s), $t_2 = 0.6$ (s)

b) $F(t) = \begin{cases} 150\sin\dfrac{\pi t}{t_2} & 0 \le t \le t_2 \\ 0 \quad t > t_2 \end{cases}$ với $t_2 = 0.6$ (s) (hình BT 4.3b)

c) $F(t) = \begin{cases} 50\sin\left(1 - \dfrac{t}{t_2}\right) & 0 \le t \le t_2 \\ 0 \quad t > t_2 \end{cases}$ với $t_2 = 0.6$ (s) (xem hình BT 4.3c)

d) $F(t) = \begin{cases} 500\dfrac{t}{t_2} & 0 \le t \le t_2 \\ 500 \quad t > t_2 \end{cases}$ với $t_2 = 0.6$ (hình BT 4.3d)



Hình BT 4.3

4.4 Hệ dao động một bậc tự do có có cản tỷ lệ bình phương vận tốc, chịu kích động bởi một lực $F = F_0$ trong khoảng thời gian $t_1 \le t \le t_2$. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$m\ddot{x} + \alpha sign(\dot{x})\dot{x}^2 + cx = F(t)$$

Cho biết m = 10 (kg), c = 200 (N/m), α = 5, F_0 = 150 (N), t_1 =1.5 (s), t_2 = 5(s), các điều kiện đầu: $x(0) = 0$ và $\dot{x}(0) = 1.0$. Hãy tính toán và biểu diễn trên đồ thị biên độ dao động bằng MATHCAD, MATLAB, MAPLE.

4.5 Hệ dao động một bậc tự do có thành phần độ cứng phi tuyến. Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + c_1x^3 = F(t)$$

Lực F(t) có dạng: $F(t) = \begin{cases} 150\sin\dfrac{\pi t}{t_2} & 0 \le t \le t_2 \\ 0 & t > t_2 \end{cases}$ với t_2 = 0.5 (s).

Cho biết m = 100 (kg), b = 30 (kg/s), c = 2000 (N/m), c_1 = 300 N/m^3, các điều kiện đầu: x(0) = 0.01 và $\dot{x}(0) = 1.0$. Hãy tính toán, biểu diễn trên đồ thị biên độ dao động bằng MATHCAD, MATLAB, MAPLE và so sánh kết quả với trường hợp tuyến tính (c_1 = 0).

4.6 Cho biết phương trình vi phân dao động của hệ ba bậc tự do có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t)$$

với $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = 10^4.\begin{bmatrix} 30 & -30 & 0 \\ -30 & 38 & -8 \\ 0 & -8 & 88 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

trong đó $F(t) = 1000$ N trong khoảng $t_1 \le t \le t_2$ với t_1 = 0.1 (s), t_2 =0.3 (s). Cho biết ban đầu hệ đứng yên, hãy tính toán tần số riêng, dạng dao động riêng và biên độ dao động của hệ bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB và MAPLE.

4.7 Hệ dao động tuyến tính có cản được biểu diễn bởi phương trình vi phân:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 4m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 27 & -27 & 0 \\ -27 & 54 & -27 \\ 0 & -27 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}+\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cho biết các giá trị: $m = 3000$ (kg), $E = 6.9\times10^9$ N/m^2, $I = 5\times10^{-6}$ (m^4), $l = 2$ (m). Ban đầu hệ đứng yên. Lực *F(t)* có dạng:

$$F(t) = \begin{cases} 10^3 t & 0 \le t \le 10 \\ 10^4 & t > 10 \end{cases}$$

Hãy tính toán, biểu diễn trên đồ thị biên độ dao động bằng MATHCAD, MATLAB, MAPLE.

4.8 Hãy tính toán biên độ dao động của hệ bốn bậc tự do có cản, chịu kích động tuần hoàn bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE. Cho biết:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = 10^2.\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(4t)+\sin(8t) \\ \cos(4t)+0.5\cos(8t) \end{bmatrix}, \text{ các điều kiện đầu: } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.01 \end{bmatrix}, \ \dot{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.9 Một hệ dao động cưỡng bức với hai tần số được mô tả bởi phương trình vi phân:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F_1 \sin\Omega_1 t + F_2 \sin\Omega_2 t$$

a) Giải phương trình vi phân bằng các hệ chương trình MAPLE, MATLAB, MATHCAD với các tham số tự chọn.

b) Đặt $\eta_i = \Omega_i/\omega$; (i =1; 2), vẽ quan hệ giữa các biên độ và η_i.

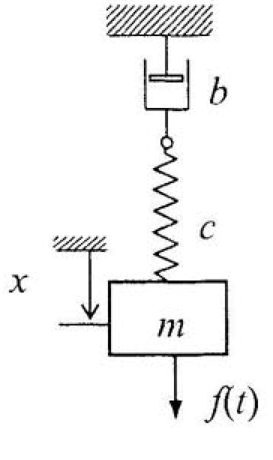
4.10 Cho hệ dao động như hình BT 4.10. Cho biết: m = 1800 (kg); c = 7200 (N/m); b = 13000 (kg/s); $f(t) = F_0 \sin\Omega t$; F_0 = 130 (N) và Ω = 20 (rad/s).

a) Thiết lập phương trình vi phân dao động của hệ.

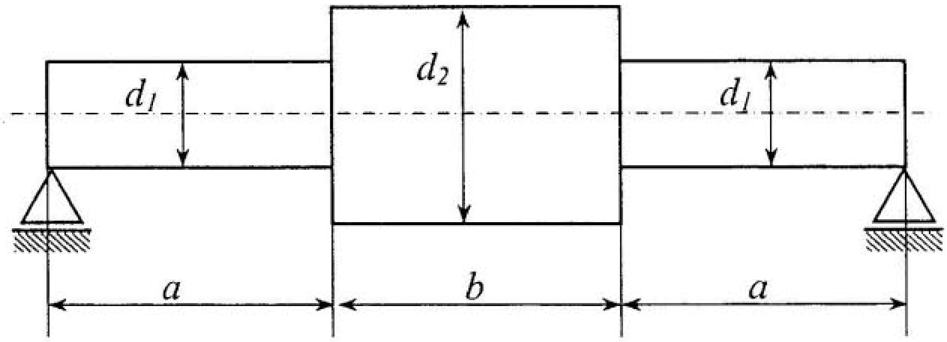
b) Tính toán dao động cưỡng bức bình ổn của hệ bằng các hệ chương trình MATHCAD, MATLAB, MAPLE.

Đáp số: a) Phương trình vi phân dao động:

$$m\ddot{x} + \frac{cm}{b}\dot{x} + cx = \frac{cF_0}{b\Omega} + F_0 \sin\Omega t - \frac{cF_0}{b\Omega}\cos\Omega t$$



Hình BT 4.10



Hình BT 4.11

4.11 Cho một trục máy như hình BT 4.11. Trục đồng chất có thiết diện hình tròn có modul đàn hồi E, mật độ khối ρ. Cho biết chiều dài các đoạn trục a, b và các đường kính d_1, d_2. Sử dụng tỷ số Rayleigh, hãy tính toán tần số riêng cơ bản dao động uốn của trục bằng các hệ chương trình MATHCAD, MAPLE.

Đáp số: $$\omega^2 = \frac{E}{\rho}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{d_1^2[z - \sin z + v^4(\pi - z + \sin z)]}{16[z - \sin z + v^2(\pi - z + \sin z)]}$$

với $z = \dfrac{2\pi a}{l}$, $v = \dfrac{d_2}{d_1}$, $l = 2a + b$

Hướng dẫn: Ta có thể chọn đường cong uốn gần đúng của dầm thỏa mãn các điều kiện biên: $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{l}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Khang: *Dao động kỹ thuật (in lần thứ 5)*. NXB Khoa học và Kỹ thuật. Hà Nội 2009.
2. Nguyễn Văn Khang: *Cơ học kỹ thuật(in lần thứ 3)*.. NXB Giáo dục, Hà Nội 2009.
3. Nguyễn Văn Khang: *Động lực học hệ nhiều vật*. NXB Khoa học và Kỹ thuật. Hà Nội 2007.
4. I.V.Meserxkii: *Tuyển tập bài tập Cơ học lý thuyết (in lần thứ 34) (Tiếng Nga)*. NXB Khoa học, Moskva 1975.
5. V.A.Svetlitxkii, I.V. Stasenko: *Tuyển tập bài tập Lý thuyết dao động (Tiếng Nga)*. NXB Cao đẳng, Moskva 1973.
6. F.P. Beer, E.R. Johnston: *Solution Manual to Dynamics*. McGraw-Hill 1976.
7. S.G. Kelly: *Theory and Problems of MechanicalVibrations*. McGraw –Hill, New York 1996.
8. William W.Seto: *Theory and Problems of Mechanical Vibrations.* McGraw-Hill Book Company, Singapore 1964.
9. H.Dresig, L. Rockhausen: *Aufgabensammlung Maschinendynamik.* Fachbuchverlag Leipzig - Köln 1994.
10. F. Holzweissig, H. Dresig, U.Fischer, W. Stephan: *Arbeitsbuch Maschinendynamik / Schwingungslehre*. Fachbuch verlag Leipzig 1983.
11. H.H. Müller, K. Magnus: *Übungen zur Technischen Mechanik (3 . Auflage)*. B.G. Teubner Stuttgart 1988.
12. P. Lugner, K. Desoyer, A. Novak: *Technische Mechanik, Aufgaben und Lösungen (2 .Auflage)*. Springer-Verlag, Wien 1982.
13. F. P. Beer, E. R. Johnston: *Vector Mechanics for Engineers, Dynammics (6. Edition)*. McGraw-Hill, Boston 1997.
14. R. C. Hibbeler: *Engineering Mechanics, Dynamics (10. Edition)*. Prentice Hall, New Jersey 2004.

15. J.L. Merian, L.G. Kraige: *Engineering Mechanics, Dynamics (5. Edition)*. John Wiley and Sons, New York 2003.

16. R. Gasch, K. Knothe: *Strukturdynamik, Band 1*. Springer-Verlag, Berlin 1987.

17. M. Knaebel, H. Jäger, R. Mastel: *Technische Schwingungslehre, (6 . Auflage)*. Teubner Verlag, Wiesbaden 2006.

18. K. Magnus, K.Popp, W. Sextro: *Schwingungen (8. Auflage)*. Vieweg+ Teubner Verlag, Wiesbaden 2008.

19. W.T. Thomson, M.D. Dahley: *Theory of Vibration with Applications (5. Edition)*. Prentice-Hall International Inc., New Jersey 1998.

20. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 3 (2. Auflage)*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 1996.

21. D. Gross, W. Hauger, W. Schnell,J. Schröder: *Technische Mechanik, Band 3 (8. Auflage)*. Springer, Berlin 2004.

22. Phạm Huy Điển: *Tính toán, lập trình và giảng dạy toán học trên MAPLE*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội 2002.

23. Nguyễn Phùng Quang: *Matlab / Simulink dành cho kỹ sư điều khiển tự động*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2004.

24. M. R. Hatch: *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. Chapman &Hall/CRC, London 2001.

25. H. Benker: *Practical Use of Mathcad, Solving Mathematical Problems with a Computer Algebra System*. Springer, Berlin 1999.

26. G. Henning, A. Jahr, U. Mrowka: *Technische Mechanik mit MATHCAD, MATLAB und MAPLE*. Vieweg, Wiesbaden 2004.

MỤC LỤC

Trang